Introduction à la logique des prédicats VII

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 18 may 2020

Récapitulatif : La logique des prédicats

- La logique des prédicats est une extension conservative de la logique des propositions
- Les connecteurs logiques sont les mêmes qu'en logique des propositions
- Mais la logique des prédicats nous permet de représenter des inférences valides qu'on ne peut pas représenter en logique des propositions, telles que :

1. Socrate est une personne.
2. Toutes les personnes sont rationnelles.
3. $\therefore$ Socrate est rationnel.

Récapitulatif : La logique des prédicats

- En logique des propositions, la structure logique d'une formule est exclusivement déterminée par la distribution des connecteurs logiques et des variables propositionnelles
- Le langage formel de la logique des prédicats nous permet de représenter...
  - la *structure logique interne des propositions atomiques* (constantes et prédicats) et
  - des *inférences quantitatives liées aux quantificateurs "tous" et "il y a"* (variables, quantificateur existentiel et quantificateur universel)

Récapitulatif : La logique des prédicats

- Une distinction importante en L_1 est la différence entre les *formules ouvertes* (formules qui contiennent des variables libres) et les *formules fermées* (formules qui ne contiennent aucune variable ou seulement des variables qui sont liées à un quantificateur)
- La sémantique de la logique des prédicats se base sur la théorie des ensembles
- La théorie des ensembles nous aide aussi à distinguer entre différents *types de relations* (propriétés formelles des relations : réflexivité, symétrie, transitivité ; fonctions, relations d'équivalence)

Récapitulatif : La logique des prédicats

- La *vérité et la fausseté des formules* fermées est définie dans un modèle, une structure des ensembles
- Un *modèle* est un couple qui consiste en un ensemble d'objets (l'univers du modèle) et une fonction d'interprétation qui associe des significations aux constantes et prédicats
- Les *assignations* sur les modèles, des fonctions qui associent à toutes les variables des objets d'un modèle, nous permettent l'évaluation sémantique des formules ouvertes de L_1 et des formules de L_1 qui contiennent des quantificateurs
- La définition de la vérité dans un modèle relativement à une assignation sur le modèle nous permet de dériver les *conditions de vérité* de toutes les formules de L_1, de définir les concepts de validité et de conséquence logique en L_1, et de construire des preuves sémantiques

Récapitulatif : La logique des prédicats

- Il existe aussi des *méthodes syntaxiques* qui nous permettent de construire des preuves des affirmations sur la *prouvabilité* et la *dérivabilité* en logique des prédicats, notamment la déduction naturelle
- La *déduction naturelle* en logique des prédicats se base sur les mêmes règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs logiques que la déduction naturelle en logique des propositions
- S'y ajoutent des règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs existentiel et universel

Récapitulatif : La logique des prédicats

- Comme la logique classique des propositions, la logique classique des prédicats est adéquate :

Complétude Pour tout ensemble Γ de formules de L_1 et toute formule A de L_1, si $\Gamma \vDash_{\mathsf{L}_1} A$, alors $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}_1} A$.

Correction Pour tout ensemble Γ de formules de L_1 et toute formule A de L_1, si $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}_1} A$, alors $\Gamma \vDash_{\mathsf{L}_1} A$.

Adéquation Pour tout ensemble Γ de formules de L_1 et toute formule A de L_1, $\Gamma \vDash_{\mathsf{L}_1} A$ si et seulement si $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}_1} A$.

Récapitulatif : La logique des prédicats

- Ces résultats s'appliquent aussi si Γ est vide – donc ils sont également valables pour les concepts de *validité* et d'*prouvabilité* en L_1

Complétude* Pour toute formule A de L_1, si $\vDash_{\mathsf{L}_1} A$, alors $\vdash_{\mathsf{L}_1} A$.

Correction* Pour toute formule A de L_1, si $\vdash_{\mathsf{L}_1} A$, alors $\vDash_{\mathsf{L}_1} A$.

Adéquation* Pour toute formule A de L_1, $\vDash_{\mathsf{L}_1} A$ si et seulement si $\vdash_{\mathsf{L}_1} A$.

Au-delà de la logique des prédicats

Applications : théories formelles

- Le langage de la logique des prédicats a une grande puissance d'expression
- On peut l'utiliser pour formuler des *théories formelles*
- Exemples de théories formelles : les théories des nombres (p. ex. des entiers naturels), la méréologie (la théorie des parties et des touts), la théorie des ensembles, quelques branches de la physique, ...

Au-delà de la logique des prédicats

Applications : théories formelles

- Pour formuler une théorie formelle (en ce sens) on choisit un ensemble de prédicats et de constantes individuelles qui sont traités comme des termes spécifiques de la théorie (p. ex. le prédicat "être un élément" en théorie des ensembles)
- Les significations de ces termes spécifiques sont fixées en ajoutant des formules qui sont considérées comme des axiomes, des formules qui sont, dans le contexte de la théorie, supposées être valides et prouvables (p. ex. l'axiome d'extensionalité en théorie des ensembles qui dit que deux ensembles sont identiques ssi ils ont les mêmes éléments)
- La théorie elle-même peut donc être identifiée avec l'ensemble des conséquences logiques des axiomes et on peut prouver ou vérifier des affirmations substantielles sur l'objet de la théorie (p. ex. les ensembles) dans le contexte de la théorie

Au-delà de la logique des prédicats

Applications : théories formelles

- La logique classique des prédicats est souvent considérée comme la logique standard en philosophie, mais dans certains contextes, elle n'est pas adaptée
- Pour formuler certaines théories formelles, la puissance d'expression de n'est pas encore suffisante ; ces théories se basent par exemple sur des extensions de la logique des prédicats, comme la logique des prédicats contenant la notion d'identité qui sera introduite à la fin du cours

Au-delà de la logique des prédicats

Extensions et révisions de la logique des prédicats

- Il existe de nombreuses variantes de la logique des prédicats
- **Extensions** : Tout comme la logique des prédicats est une extension de la logique des propositions (les règles de preuve et la sémantique des connecteurs logiques restent les mêmes entre ces deux logiques, mais les logiques augmentées sont plus expressives et nous permettent d'inclure un surplus d'inférences), il existe aussi des extensions de la logique des prédicats
- **Révisions** : Des logiques qui rejettent des suppositions centrales de la logique classique des prédicats
- Il existe aussi des logiques qui sont simultanément des extensions et des révisions de la logique des prédicats

Au-delà de la logique des prédicats

Exemples d'extensions de la logique des prédicats

- **Logiques du second ordre** : La logique L_1 est une logique du premier ordre : elle nous permet seulement de quantifier en position nominale (les quantificateurs sont définis pour un domaine d'objets), les logiques du second ordre nous permettent en outre de quantifier en position de prédicat – elles nous permettent p. ex. de formuler des affirmations comme "Tous les objets ont des propriétés." $(\forall x \exists P(Px))$
- **Logiques modales** : Les logiques modales sont les logiques liées aux concepts modaux tels que "il est nécessaire que" et "il est possible que"
- **Logiques temporelles** : Des logiques des concepts temporels comme "il était le cas que" et "il sera le cas que"
- **Logiques doxastiques/épistémiques** : Des logiques des concepts épistémiques comme la *croyance*, la *justification*, ou la *connaissance*

Au-delà de la logique des prédicats

Exemples de révisions de la logique des prédicats

- **Logiques trivalentes** : Ces logiques admettent une troisième valeur de vérité et donc rejettent le principe de bivalence $\neg(A \wedge \neg A)$ (motivation possible : répondre au problème du vague)
- **Logiques intuitionnistes** : Ces logiques rejettent le principe du tiers exclu $A \vee \neg A$ (motivation possible : l'idée en mathématiques qu'une proposition ne peut être affirmée que si l'on dispose d'une preuve de cette proposition)
- **Logiques libres** : Ces logiques rejettent la règle d'inférence $Fa \therefore \exists x Fx$ (motivation possible : pouvoir admettre des constantes qui désignent des noms qui ne dénotent rien/aucun objet dans l'univers du modèles, comme p.ex. “Superman” ou “Pégase’)

Identité en logique des prédicats

- Notre langage L_1 contient comme expressions logiques les connecteurs logiques "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" et les quantificateurs "$\exists$" et "$\forall$"
- L'extension $L_1^=$ de L_1 y ajoute l'identité "$=$" comme expression logique additionnelle

Identité en logique des prédicats

- Notez que dans ce contexte, le concept d'identité est celui d'*identité numérique* – la relation de chaque objet à lui-même
- Ce concept doit être distingué des autres concepts d'identité moins stricts, comme p. ex. celui de l'identité personnelle qui concerne la persistance d'une personne à travers le temps (p. ex. le sens d'identité évoqué dans une affirmation comme "Claude à l'âge de trois ans est la même personne que Claude à l'âge de soixante-six ans.")

Identité en logique des prédicats

- Pourquoi traiter l'identité comme une expression logique ?
- Deux raisons : Si "=" est une expression logique,
  1. ...on peut formaliser des inférences déductives qui se basent sur des propriétés particulières de l'identité, comme p. ex. :
     - 1.1 Le Corbusier est identique à Charles-Édouard Jeanneret-Gris.
     - 1.2 Le Corbusier est un architecte.
     - 1.3 ∴ Charles-Édouard Jeanneret-Gris est un architecte.
  2. ...on peut exprimer des affirmations numériques comme, p. ex. "Il existe au moins deux livres."
- Si l'identité est traitée comme un prédicat régulier, les inférences caractéristiques de l'identité ne peuvent pas traités comme des inférences logiques et on ne peut pas exprimer d'affirmations numériques de manière complètement syntaxique

Identité en logique des prédicats

La Syntaxe de $\mathrm{L}_1^=$

L'alphabet de $\mathrm{L}_1^=$ L'alphabet de $\mathrm{L}_1^=$ est l'alphabet de L_1 plus le symbole "$=$"

Définition : les formules de $L_1^=$

1. Chaque formule atomique de L_1 est une formule de $L_1^=$ et si t_0 et t_1 sont des constantes, des variables ou une constante et une variable dans l'alphabet de $\mathrm{L}_1^=$, $t_0 = t_1$ est une formule de $L_1^=$.
2. Si A et B sont des formules de $L_1^=$, alors $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ sont des formules de $L_1^=$.
3. Si A est une formule de $L_1^=$ et v une variable de l'alphabet de $L_1^=$, alors $\exists v A$ et $\forall v A$ sont des formules de $L_1^=$.

Identité en logique des prédicats

Quelques exemples des formules de $L_1^=$

- $a = b$
- $x = y$
- $x = a$
- $\neg(a = b)$
- $a = b \wedge \neg(Pa)$
- $\exists x(x = a)$
- $\forall x(Px \to x = b)$

(Nous utilisons toujours la convention que x, y sont des variables, a, b des constantes, et P un prédicat)

Identité en logique des prédicats

La sémantique de $L_1^=$

- La sémantique de $L_1^=$ est la sémantique de L_1 plus une clause qui définit la vérité des formules atomiques qui contiennent "$=$" dans un modèle relativement à une assignation des formules atomique qui contiennent "$=$" :

Identité en logique des prédicats

Définition : vérité dans un modèle relativement à une assignation

- Soit $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ un modèle, ρ une assignation sur $\mathfrak{M}$, t_0 et t_1 des constantes, des variables ou une constante et une variable dans l'alphabet de $\mathrm{L}_1^=$, et soit $\rho I(t_k)$: $\rho(t_k)$ si t_k est une variable et $I(t_k)$ si t_k est une constante.

La clause additionnelle de la définition de la vérité dans un modèle relativement à une assignation pour les formules atomiques qui contiennent le symbole "$=$" est :

1.$^=$ $\mathfrak{M}, \rho \Vdash t_0 = t_1$ si et seulement si $\rho I(t_0)$ est le même objet que $\rho I(t_1)$.

- Les définitions de la conséquence logique et de la validité en $\mathrm{L}_1^=$ restent les mêmes que dans L_1

Identité en logique des prédicats

Propriétés formelles de “$=$”

Réflexivité $\models_{\mathbf{L}_1^=} \forall x(x = x)$

Symétrie $\models_{\mathbf{L}_1^=} \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

Transitivité $\models_{\mathbf{L}_1^=} \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

Indiscernabilité des identiques $\models_{\mathbf{L}_1^=} \forall x \forall y(x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$

Identité en logique des prédicats

Formaliser des affirmations numériques en $L_1^=$

- En $L_1^=$ on peut formaliser “Il y a au moins deux livres.” comme :
- $\exists x \exists y (Lx \wedge Ly \wedge \neg(x = y))$
- Sans le symbole d’identité, on peut seulement traduire cette phrase comme :
- $\exists x \exists y (Lx \wedge Ly)$
- Mais cette formule n’exclut pas la possibilité que x et y soient le même objet et donc ne dit pas qu’il y a au moins deux livres
- On peut aussi formaliser “Il y a (exactement) deux livres.” en $L_1^=$:
- $\exists x \exists y ((Lx \wedge Ly \wedge \neg(x = y) \wedge \forall z (Lz \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

- Pour définir une théorie de la preuve pour $\mathsf{L}_1^=$, une théorie qui définisse la relation $\vdash_{\mathsf{L}_1^=}$ et les deux concepts syntaxiques dérivabilité de . . . et de prouvabilité en $\mathsf{L}_1^=$, nous pouvons simplement enrichir la déduction naturelle pour L_1 en y ajoutant des règles d'introduction et d'élimination pour "$=$"

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Règle d'introduction pour l'identité =-E

$$
\begin{array}{r|l}
\vdots & \vdots \\
\text{n} & c = c
\end{array}
$$

où c est n'importe quelle constante

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Explication de la règle =-E

- L'idée fondamentale de la règle est que les affirmations de la forme logique "$c = c$" sont toujours vraies ; on peut donc toujours, dans n'importe quel contexte, affirmer qu'un objet est identique à lui-même
- Notez qu'il suit de la réflexivité de l'identité que chaque formule de la forme $c = c$ est valide ; ce fait sémantique correspond au fait qu'on peut toujours ajouter une telle formule à une preuve en déduction naturelle

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Exemple : $\vdash_{L_1^=} \forall x(x = x)$

1	$a = a$	$=$-I
2	$\forall x(x = x)$	$\forall$-I(1)

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Règle d'élimination pour l'identité $=$-E

n	$c = d$
$\vdots$	$\vdots$
o	$A[v/c]$
$\vdots$	$\vdots$
p	$A[v/d]$

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Explication de la règle =-E

- L'idée de cette règle est que si c et d sont le même objet, alors toute propriété de c est également une propriété de d
- P. ex., comme Le Corbusier est identique à Charles-Édouard Jeanneret-Gris, nous pouvons déduire du fait que Le Corbusier est né à La Chaux-de-Fonds que Charles-Édouard Jeanneret-Gris est lui aussi né à La Chaux-de-Fonds

Identité en logique des prédicats

La déduction naturelle en $L_1^=$

Exemple : $Fa, \neg Fb \vdash_{L_1^=} \neg a = b$

1	Fa	Hypothèse
2	$\neg Fb$	Hypothèse
3	$\quad a = b$	Hypothèse
4	$\quad Fa$	R(1)
5	$\quad Fb$	=E(3,4)
6	$\quad \neg Fb$	R(2)
7	$\neg a = b$	¬I(3,5,6)

Identité en logique des prédicats

Autres exemples des preuves en déduction naturelle en $L_1^=$

Exemple : $\vdash_{L_1^=} \forall x \forall y \forall z((x = y \land y = z) \to x = z)$

1	$\quad a = b \land b = c$	Hypothèse
2	$\quad a = b$	$\land$-E(1)
3	$\quad b = c$	$\land$-E(1)
4	$\quad a = c$	$=$-E(2,3)
5	$(a = b \land b = c) \to a = c$	$\to$-I(1,4)
6	$\forall z((a = b \land b = z) \to a = z)$	$\forall$-I(5)
7	$\forall y \forall z((a = y \land y = z) \to a = z)$	$\forall$-I(6)
8	$\forall x \forall y \forall z((x = y \land y = z) \to x = z)$	$\forall$-I(7)

Identité en logique des prédicats

Autres exemples des preuves en déduction naturelle en $L_1^=$

Exemple : $\forall x \forall y (Rxy \leftrightarrow x = y) \vdash_{L_1^=} \forall x (Rxx)$

1	$\forall x \forall y (Rxy \leftrightarrow x = y)$	Hypothèse
2	$\forall y (Ray \leftrightarrow a = y)$	$\forall$-E(1)
3	$Raa \leftrightarrow a = a$	$\forall$-E(2)
4	$a = a$	$=$-I
5	Raa	$\leftrightarrow$-E(3,4)
6	$\forall x (Rxx)$	$\forall$-I(5)

Identité en logique des prédicats

Autres exemples des preuves en déduction naturelle en $L_1^=$

Exemple : $\vdash_{L_1^=} \exists x(x = a)$ (pour n'importe quel a)

1	$a = a$	$=$-I
2	$\exists x(x = a)$	$\exists$-I(1)

- Notez que l'application de $\exists$-I à la ligne 2 est permis parce-que $x = a[a/x]$ est $a = a$
- En général, la règle $\exists$-I nous permet d'introduire un quantificateur existentiel qui se lie seulement à une occurrence (ou quelques-unes) de la constante qui est remplacée par la variable dans l'application de la règle