# Introduction à la logique des prédicats VI

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 4 may 2020

# Déduction naturelle en $L_1$

## Rappel : méthodes formelles syntaxiques

- Comme en logique des propositions, il existe des méthodes formelles syntaxiques en logique des prédicats
- Les méthodes formelles sémantiques nous permettent de montrer qu'une formule $A$ est valide ($\vDash_{L_1} A$) ou non valide ($\nvDash_{L_1} A$) ou quelle est une conséquence logique des formules $\Gamma$ ($\Gamma \vDash_{L_1} A$) ou pas ($\Gamma \nvDash_{L_1} A$) – ces méthodes se basent sur la signification des formules, leur vérité ou leur fausseté
- Elles nous permettent de montrer qu'une formule $A$ est prouvable/un théorème ($\vdash_{L_1} A$) ou non (($\nvdash_{L_1} A$)) ou quelle est dérivable des formules $\Gamma$ ($\Gamma \vdash_{L_1} A$) ou non ($\Gamma \nvdash_{L_1} A$) – ces méthodes se basent sur une théorie de la preuve

# Déduction naturelle en $L_1$

## La déduction naturelle en $L_1$

- Nous discuterons seulement une méthode syntaxique pour $L_1$, *la déduction naturelle*
- Comme en logique des propositions, la déduction naturelle nous permet de construire des preuves qui montrent qu'une formule $A$ est valide ($\vdash_{L_1} A$) ou qu'elle est conséquence logique des formules $\Gamma$ ($\Gamma \vdash_{L_1} A$)
- Comme les clauses sémantiques qui définissent la vérité des formules de $L_1$ qui contiennent les connecteurs logique dans un modèle et relativement à une assignation, les règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques en déduction naturelle en logique de prédicats sont identiques aux règles en logique des propositions
- La seule différence est que les métavariables $A, B, C, \ldots$ représentent des formules (atomiques ou complexes) **fermées** de $L_1$

# Déduction naturelle en $L_1$

## La déduction naturelle en $L_1$ - notation

- Il reste donc à introduire et expliquer les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs $\forall$ et $\exists$
- Pour définir ces règles, nous utilisons une notation formelle qui nous permet de faire référence aux formules qui résultent d'une substitution des occurrences libres d'une variable dans une formule ouverte à une constante :

Définition : **A[c/v]** Soit '$v$' une variable, '$c$' une constante et '$A$' une formule de $L_1$ qui contient une ou plusieurs occurrences libres de $v$, mais pas des occurrences libres d'autres variables. Alors $A[c/v]$ est la formule qui résulte de la substitution de $c$ pour toutes les occurrences libres de $v$ dans $A$.

# Déduction naturelle en $L_1$

## La déduction naturelle en $L_1$ - notation

- Exemples :
  - $Rax[a/x] = Raa$
  - $\forall x(Px \rightarrow Qy)[a/y] = \forall x(Px \rightarrow Qa)$
  - $(Px \wedge \exists x(Rxx))[b/x] = (Pb \wedge \exists x R(xx))$
  - $\exists x(Px \vee Ryx)[a/y] = \exists x(Px \vee Rax)$
  - $\forall x(Px \leftrightarrow Qx)[a/x] = \forall x(Px \leftrightarrow Qx)$ – (cas trivial : si $A$ ne contient aucune occurrence libre de $x$, $A[a/x] = A$)

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'élimination pour le quantificateur universel ∀-E

### La régle ∀-E

| | |
|---|---|
| n | $\forall v A$ |
| ⋮ | ⋮ |
| o | $A[c/v]$ |

Où $c$ dans la ligne $n$ représente n'importe quelle constante.

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'élimination pour le quantificateur universel ∀-E

## Explication de la règle ∀-E

| | |
|---|---|
| n | $\forall v A$ |
| ⋮ | ⋮ |
| o | $A[c/v]$ |

Où $c$ dans la ligne $n$ représente n'importe quelle constante.

- L'idée de la règle est simple : si on a démontré ou supposé dans une preuve qu'une formule est satisfaite par tout objet, elle est par conséquence également satisfaite par n'importe quelle constante $c$
- Il n'y a pas de restriction au choix de la constante $c$ ; on peut introduire une nouvelle constante ou utiliser n'importe quelle constante qui figurait dans la dérivation
- Un exemple d'une inférence qui correspond à cette règle : Tous les objets sont matériels. Par conséquent, la Tour Eiffel est matérielle

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'élimination pour le quantificateur universel ∀-E

Exemple : $\forall x(Px) \vdash_{L_1} Pa$ (pour n'importe quel $a$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x Px$ | Hypothèse |
| 2 | $Pa$ | ∀-E(1) |

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur existentiel ∃-I

## La règle ∃-I

$$
\begin{array}{c|l}
\text{n} & A[c/v] \\
\vdots & \vdots \\
\text{o} & \exists v A
\end{array}
$$

Où $c$ dans la ligne $n$ représente n'importe quelle constante.

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'introduction pour le quantificateur existentiel ∃-I

### Explication de la règle ∃-I

| | |
|---|---|
| n | $A[c/v]$ |
| ⋮ | ⋮ |
| o | $\exists v A$ |

Où $c$ dans la ligne $n$ représente n'importe quelle constante.

- Comme défini plus haut, $A[c/v]$ est la formule dans laquelle la constante $c$ a été substituée à toutes les occurrences libres de la variable $v$ dans la formule ouverte $A$
- Dans la règle ∃-I, ce remplacement est seulement "virtuel", car la formule $A$ ne figure pas forcement dans la dérivation avant $A[c/v]$

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur existentiel ∃-I

## Explication de la règle ∃-I

| | |
|---|---|
| n | $A[c/v]$ |
| ⋮ | ⋮ |
| o | $\exists vA$ |

Où $c$ dans la ligne $n$ représente n'importe quelle constante.

- Pour expliquer l'essence de cette règle, supposons que la règle soit appliquée à une formule de la forme $Pa$
- Cette formule dit que l'objet (dénoté par) $a$ a la propriété (dénotée par) $P$
- La règle nous permet de dériver $\exists xPx$ de $Pa$ – intuitivement, elle nous permet de dériver qu'il existe un objet qui a la propriété (dénotée par) $P$ du fait que $a$ a cette propriété – p. ex. le fait que Neuchâtel est une ville implique qu'il y a (au moins) une ville

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'introduction pour le quantificateur existentiel ∃-I

Exemple : $Pa \vdash_{L_1} \exists x Px$ (pour n'importe quelle constante $a$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $Pa$ | Hypothèse |
| 2 | $\exists x Px$ | ∃-I(1) |

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

### La règle ∀-I

| | |
|---|---|
| n | $A[c/v]$ |
| ⋮ | ⋮ |
| o | $\forall v(A)$ |

Où $c$ n'apparaît **i)** ni dans $A$, **ii)** ni dans une hypothèse de la preuve principale, **iii)** ni dans une hypothèse d'une sous-preuve qui ne s'est pas terminée.

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

## Explication de la règle ∀-I

$$
\begin{array}{c|l}
\text{n} & A[c/v] \\
\vdots & \vdots \\
\text{o} & \forall v(A)
\end{array}
$$

Où $c$ n'apparaît **i)** ni dans $A$, **ii)** ni dans une hypothèse de la preuve principale, **iii)** ni dans une hypothèse d'une sous-preuve qui ne s'est pas terminée.

- Si les conditions i)-iii) ne sont pas satisfaites, la règle ne peut pas être appliquée
- L'idée de la règle est que si $A$ est satisfaite par un objet *arbitraire*, alors $A$ est satisfaite par tout objet
- Rappel : un objet arbitraire est un objet qui n'a pas des propriétés spécifiques

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

## Explication de la règle ∀-I

- Dans le contexte d'une preuve en déduction naturelle, une constante $c$ dénote un objet arbitraire si les formules contenues dans la preuve qui sont explicitement supposées pour construire la preuve n'expriment rien sur $c$ – cette restriction concerne les hypothèses de la preuve principale et de toutes les sous-preuves qui ne se sont pas terminées (conditions ii) et iii))
- Intuitivement, on peut dire qu'une constante qui dénote une objet arbitraire fonctionne dans le contexte de la preuve comme une variable
- Notez bien qu'on peut bien appliquer la règle à $A[c/v]$ si $c$ est contenue dans une hypothèse d'une sous-preuve qui s'est déjà terminée et pareillement si $c$ est contenue dans une formule qui a été déjà dérivée d'une hypothèse de la preuve principale

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

## Explication de la règle ∀-I

- La condition i) assure que toute occurrence de la constante $c$ est remplacée par une occurrence de la variable liée au quantificateur universel introduit par l'application de la règle
- Elle est essentielle pour exclure des applications de la règle qui produisent des **inférences erronées** tel que la suivante :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall y R y y$ | Hypothèse |
| 2 | $Raa$ | ∀-E(1) |
| 3 | $\forall x R a x$ | **application erronée** de ∀-I(2) |

- Supposons que $R$ signifie 'est identique à' et $a$ signifie Charlie
- Donc, cette dérivation nous permet de déduire la conclusion 'Tout objet est identique à Charlie' de la prémisse 'Tout objet est identique à lui-même.' – c'est évidemment un sophisme !

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

### Exemple : $\neg\forall x Px \vdash_{L_1} \exists x \neg Px$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\forall x Px$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad\neg\exists x\neg Px$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad\quad\neg Pa$ | Hypothèse |
| 4 | $\quad\quad\exists x\neg Px$ | ∃-I(3) |
| 5 | $\quad\quad\neg\exists x\neg Px$ | R(2) |
| 6 | $\quad\neg\neg Pa$ | ¬-I(3,4,5) |
| 7 | $\quad Pa$ | ¬-E(6) |
| 8 | $\quad\forall x Px$ | ∀-I(7) |
| 9 | $\quad\neg\forall x Px$ | R(1) |
| 10 | $\neg\neg\exists x\neg Px$ | ¬-I(2,8,9) |
| 11 | $\exists x\neg Px$ | ¬-E(10) |

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'introduction pour le quantificateur universel ∀-I

## Commentaires sur la preuve

- Notez que l'application de la règle ∀-I à la formule en ligne 7 est correcte :
  - $Px$ ne contient aucune occurrence de $a$ (la condition i) est satisfaite)
  - Ni l'hypothèse de la sous-preuve en ligne 2, ni l'hypothèse en ligne 1 ne contiennent $a$ (les conditions ii) et iii) sont satisfaites)
- La constante $a$ apparaît dans la ligne 3, mais cette formule est l'hypothèse d'une sous-preuve qui s'est déjà terminée en ligne 6 ; donc, cette occurrence de $a$ dans une (sous-)hypothèse ne nous empêche pas d'appliquer la règle en ligne 8
- La formule $\neg\neg Pa$ en ligne 6 contient bien $a$, mais elle n'est ni une hypothèse de la preuve principale, ni une hypothèse d'une sous-preuve qui ne s'est pas déjà terminée ; les conditions i)-iii) ne placent aucune restriction sur les formules qui ont été dérivées dans des hypothèses ou sous-hypothèses

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'élimination pour le quantificateur existentiel ∃-E

### La règle ∃-E

| | |
|---|---|
| n | $\exists v A$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| o | $\quad \mid\ A[c/v]$ |
| $\vdots$ | $\quad \mid\ \vdots$ |
| p | $\quad \mid\ B$ |
| q | $B$ |

Où $c$ est une constante qui **i)** n'apparait ni dans $A$, **ii)** ni dans $B$, **iii)** ni dans une hypothèse de la preuve principale, **iv)** ni dans une hypothèse d'une sous-preuve différente de $A[c/v]$ qui ne s'est pas terminée.

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'élimination pour le quantificateur existentiel ∃-E

## Explication de la règle ∃-E

- Les quatre conditions i-iv) doivent être satisfaites dans chaque application correcte de la règle
- Comme dans la règle ∀-I, la constante $c$ doit être arbitraire (les conditions i), iii) et iv) doivent être satisfaites) – l'idée de la règle est que si $A$ s'applique à un objet arbitraire $a$ et si la supposition que c'est le cas implique que $B$, alors $\exists vA$ implique également $B$, *si* $B$ n'exprime rien sur $a$
- Justification de la condition ii) : sans cette condition, la règle nous permettrait de démontrer que $A$ est satisfait par un objet arbitraire – la règle serait en effet une variante de la règle d'élimination pour le quantificateur universel ∀-E
- Sans condition ii), elle nous permettrait p. ex. de dériver du fait qu'il y a une personne qui est plus riche que Bill Gates que, p. ex., je suis plus riche que Bill Gates

# Déduction naturelle en $L_1$

Règle d'élimination pour le quantificateur existentiel ∃-E

## Explication de la règle ∃-E

- Pour illustrer l'essence de la règle, considérons encore une fois le cas le plus simple :
  - Si nous avons déjà dérivée $\exists xPx$ ou si cette formule est supposée comme une hypothèse, et si nous pouvons dériver une formule $B$ (qui ne contient pas $a$) de l'hypothèse que $Pa$ (peut-être à l'aide, p. ex., des hypothèses de la preuve principale), alors nous avons dérivée $B$ de $\exists xPx$
  - Intuitivement, la règle dit que toutes les implications de la formule $Pa$ qui ne contiennent pas $a$ sont aussi des implications de $\exists xPx$, si $a$ signifie un objet arbitraire ; on peut résumer l'idée ainsi : si le fait que n'importe quel objet a la propriété $P$ implique que $B$ (où $B$ n'exprime rien sur $a$), alors le fait qu'il y a un objet qui a cette propriété a la même implication

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'élimination pour le quantificateur existentiel ∃-E

Exemple : $\exists x \neg Px \vdash_{L_1} \neg \forall x Px$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x \neg Px$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad \neg Pa$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad\quad \forall x Fx$ | R(1) |
| 4 | $\quad\quad Pa$ | ∀-E(3) |
| 5 | $\quad\quad \neg Pa$ | R(2) |
| 6 | $\quad \neg \forall x Px$ | ¬-I(3,4,5) |
| 7 | $\neg \forall x Px$ | ∃-E(1,2,6) |

# Déduction naturelle en $L_1$

## Règle d'élimination pour le quantificateur existentiel ∃-E

Exemple : $\exists x \neg Px \vdash_{L_1} \neg \forall x Px$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x \neg Px$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad \neg Pa$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad\quad \forall x Px$ | R(1) |
| 4 | $\quad\quad Pa$ | ∀-E(3) |
| 5 | $\quad\quad \neg Pa$ | R(2) |
| 6 | $\quad \neg \forall x Px$ | ¬-I(3,4,5) |
| 7 | $\neg \forall x Px$ | ∃-E(1,2,6) |

- Dans la ligne 7, nous pouvons appliquer la règle ∃-E, car $a$ n'apparait ni dans $\neg Fx$ (soit $\neg Fa[a/x]$) (la condition i) est satisfaite), ni dans $\neg \forall x Fx$ (la formule dérivée de $\neg Fa$ pour éliminér $\exists$ dans $\exists x \neg Fx$ ; (la condition ii) est satisfaite), ni dans la seule hypothèse qui n'est pas déjà éliminée, l'hypothèse de la preuve principale $\exists x \neg Fx$ (la condition iii) et, de manière triviale, aussi la condition iv) sont satisfaites)

# Rappel : Stratégies des preuves en déduction naturelle

- Pour construire une preuve, commencez par la fin !
- Identifiez le connecteur logique principal **ou** le quantificateur principal dans la formule qui doit être prouvée – le connecteur logique ou quantificateur qui a la portée maximale dans cette formule ; p. ex. "$\forall x$" dans "$\forall x(Px \rightarrow Qx)$" ou "$\neg$" dans "$\neg(Pa \wedge \exists yQy)$"
- Déterminez si la ou les formules supposées pour la dérivation contiennent des formules qui peuvent être utilisées dans la dérivation
- Identifiez une règle qui permet de construire une formule de cette forme logique dans le contexte d'une preuve – p. ex. la règle ∀-I pour "$\forall x(Px \rightarrow Qx)$" ou la règle ¬-I pour "$\neg(Pa \wedge \exists yQy)$'
- ...

# Rappel : Stratégies des preuves en déduction naturelle

- Identifiez la règle qui permet de construire la formule nécessaire pour appliquer cette règle dans la preuve – p. ex. "$\forall x(Px \rightarrow Qx)$" peut résulter d'une application de la règle ∀-I à une formule de la forme "$Pa \rightarrow Qa$" (où $a$ n'appartient pas aux hypothèses utilisées pour la dérivation) ; et pour une preuve de "$\neg(Pa \wedge \exists yQy)$" qui se termine avec une application de la règle ¬-I, il faut une sous-preuve dans laquelle une formule et sa négation (soit, une contradiction) sont dérivées de l'hypothèse '$Pa \wedge \exists y(Qy)$'
- À chaque étape de ce processus de délibération, rappelez-vous que si la règle la plus évidente ne marche pas, on peut presque toujours utiliser une autre règle pour arriver à la même formule – au lieu de la règle $\forall - I$, on peut p. ex. utiliser la règle ¬-E pour dériver "$\forall x(Px \rightarrow Qx)$"

# Exemples des preuves

$\exists x(Rxa \wedge Px) \vdash_{L_1} \exists x Rxa$ (pour n'importe quel $a$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x(Rxa \wedge Px)$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad Rba \wedge Pb$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad Rba$ | $\wedge$-E(3) |
| 4 | $\quad \exists x Rxa$ | $\exists$-I(3) |
| 5 | $\exists x Rxa$ | $\exists$-E(1,2,4) |

# Exemples des preuves

$\exists x Px \rightarrow Qa \vdash_{L_1} \forall x(Px \rightarrow Qa)$ (pour n'importe quel $a$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x Px \rightarrow Qa$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad Pb$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad \exists x Px$ | ∃-I(2) |
| 4 | $\quad \exists x Px \rightarrow Qa$ | R(1) |
| 5 | $\quad Qa$ | →-E(3,4) |
| 6 | $Pb \rightarrow Qa$ | →-I(2,5) |
| 7 | $\forall x(Px \rightarrow Qa)$ | ∀-I(6) |

# Exemples des preuves

$\exists x Px \vee \exists y Qy \vdash_{L_1} \exists x(Px \vee Qx)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x Px \vee \exists y Qy$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad \exists x Px$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad\quad Pa$ | Hypothèse |
| 4 | $\quad\quad Pa \vee Qa$ | ∨-I(3) |
| 5 | $\quad\quad \exists x(Px \vee Qx)$ | ∃-I(4) |
| 6 | $\quad \exists x(Px \vee Qx)$ | ∃-E(2,3,5) |
| 7 | $\quad \exists y Qy$ | Hypothèse |
| 8 | $\quad\quad Qb$ | Hypothèse |
| 9 | $\quad\quad Pb \vee Qb$ | ∨-I(8) |
| 10 | $\quad\quad \exists x(Px \vee Qx)$ | ∃-I(9) |
| 11 | $\quad \exists x(Px \vee Qx)$ | ∃-E(7,8,10) |
| 12 | $\exists x(Px \vee Qx)$ | ∨-E(1,6,11) |

# Exemples des preuves

$Pa \rightarrow \forall x(Rxa \vee Rax) \vdash_{L_1} \forall x(Pa \rightarrow (Rxa \vee Rax))$ (pour n'importe quel $a$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $Pa \rightarrow \forall x(Rxa \vee Rax)$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad Pa$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad Pa \rightarrow \forall x(Rxa \vee Rax)$ | R(1) |
| 4 | $\quad \forall x(Rxa \vee Rax)$ | $\rightarrow$-E(2,3) |
| 5 | $\quad Rba \vee Rab$ | $\forall$-E(4) |
| 6 | $Pa \rightarrow (Rba \vee Rab)$ | $\rightarrow$-I(2,5) |
| 7 | $\forall x(Pa \rightarrow (Rxa \vee Rax))$ | $\forall$-I(6) |

# Exemples des preuves

$\forall x(Px \rightarrow Qx), \exists x Px \vdash_{L_1} \exists x Qx$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ | Hypothèse |
| 2 | $\exists x Px$ | Hypothèse |
| 3 | $Pa$ | Hypotèse |
| 4 | $Pa \rightarrow Qa$ | ∀-E(1) |
| 5 | $Qa$ | →-E(3,4) |
| 6 | $\exists x Qx$ | ∃-I(5) |
| 7 | $\exists x Qx$ | ∃-E(2,6) |

# Exemples des preuves

$\exists y \forall x Rxy \vdash_{L_1} \forall x \exists y Rxy$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists y \forall x Rxy$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad \forall x Rxa$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad Rba$ | $\forall$-E(2) |
| 4 | $\quad \exists y Rby$ | $\exists$-I(3) |
| 5 | $\exists y Rby$ | $\exists$-E(1,2,4) |
| 6 | $\forall x \exists y Rxy$ | $\forall$-I(5) |

# Exemples des preuves

$\forall x \neg Px \vdash_{L_1} \neg \exists x Px$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x \neg Px$ | Hypothèse |
| 2 | $\quad \exists x Px$ | Hypothèse |
| 3 | $\quad\quad Pa$ | Hypothèse |
| 4 | $\quad\quad\quad \forall x \neg Px$ | Hypothèse |
| 5 | $\quad\quad\quad Pa$ | R(3) |
| 6 | $\quad\quad\quad \neg Pa$ | ∀-E(1) |
| 7 | $\quad\quad \neg \forall x \neg Px$ | ¬I(4,5,6) |
| 8 | $\quad \neg \forall x \neg Px$ | ∃-E(2,3,7) |
| 9 | $\quad \forall x \neg Px$ | R(1) |
| 10 | $\neg \exists x Px$ | ¬I(2,8,9) |