Introduction à la logique des prédicats V

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 20 avril 2020

Rappel : Sémantique de L_1

- Soit $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ un modèle, ρ une assignation sur $\mathfrak{M}$, A et B des formules de L_1, P_i^n un prédicat $n - aire$ dans l'alphabet de L_1, soit v une variable dans l'alphabet de L_1, soit chaque $t_k \in \{t_1, \ldots, t_n\}$ une variable ou une constante dans l'alphabet de L_1 et soit $\rho I(t_k)$: $\rho(t_k)$ si t_k est une variable et $I(t_k)$ si t_k est une constante

1. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement si $\langle \rho I(t_1), \ldots, \rho I(t_n) \rangle \in I(P_i^n)$.
2. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \nVdash A$.
3. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \wedge B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ et $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
4. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \vee B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ ou $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
5. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \rightarrow B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \nVdash A$ ou $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
6. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \leftrightarrow B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
7. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists v(A)$ si et seulement si il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en v, telle que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash A$.
8. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall v(A)$ si et seulement si pour toutes les assignations ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffèrent de ρ au maximum en v, $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash A$.

Rappel : validité et conséquence logique en L_1

Définition : validité en L_1 $\models_{L_1} A$ si et seulement si pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et pour toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$

Définition : conséquence logique en L_1 $\Gamma \models_{L_1} A$ si et seulement si pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, si pour toutes les formules $B \in \Gamma$, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$, alors $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$.

Preuves sémantiques en L_1

- Pour montrer qu'une formule de L_1 A est valide, nous devons montrer que A est vraie dans tous les modèles et relativement à toute assignation
- Mais comment peut-on montrer qu'une formule A est une conséquence logique d'un ensemble des formules Γ, (en symboles : $\Gamma \vDash_{L_1} A$) ?
- Il faut montrer que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et toute assignation ρ, si toutes les formules dans Γ sont vraies dans $\mathfrak{M}$ et relativement à ρ, alors A est aussi vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
- Une technique pour le faire est de le démontrer pour un modèle arbitraire et relativement à une assignation arbitraire sur le modèle
- Des techniques alternatives existent, p. ex. : démontrer la contraposition ($\neg A \vDash_{\mathrm{L}_1} \neg(G_i \wedge \ldots \wedge G_j)$ où pour chaque $G_k \in \{G_i, \ldots, G_j\}$, $G_k \in \Gamma$; démontrer que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vDash_{\mathrm{L}_1} \perp$ ($\perp$= une contradiction), ...)

Stratégie générale pour la construction des preuves sémantiques

Construction d'une preuve sémantique en trois étapes

1. Déterminer la fait qui doit être prouvé sur la base des définitions de la validité et de la conséquence logique en L_1
   - P. ex. pour prouver que $\vDash_{L_1} A$, il faut démontrer que A remplit la définition de validité en L_1 ; pour prouver que $A, B \vDash_{L_1}$ il faut démontrer que A, B et C ne remplissent pas la définition de la conséquence logique en L_1

Stratégie générale pour la construction des preuves sémantiques

Construction d'une preuve sémantique en trois étapes

2. Déterminer les conditions de vérité en langage de la théorie des ensembles des formules pertinentes pour la preuve (p. ex. A, B, C en cas de la preuve de $A, B \vDash_{L_1} C$) sur la base des clauses de la définition de vérité dans un modèle, relativement à une assignation
   - Le but et de dériver la condition placé par chaque formule pertinente sur un modèle et une assignation afin que la formule est vraie dans un modèle, relativement à une assignation – une telle condition est toujours le résultat d'une application de clause 1 de la définition de vérité dans un modèle relativement à une assignation, c'est-à-dire, elle contient toujours une assertion dans le langage de la théorie des ensembles comme p. ex. $\rho(x) \in I(P)$ ou $I(a) \notin I(Q)$, etc.

Stratégie générale pour la construction des preuves sémantiques

Construction d'une preuve sémantique en trois étapes

3. Appliquer une stratégie de preuve convenable
   - P. ex. si on veut prouver que $\vDash_{L_1} A$, on peut démontrer que la condition de vérité de A est satisfaite dans un modèle arbitraire, relativement à une assignation arbitraire afin de prouver que A est vraie relativement à toute assignation dans chaque modèle, c'est-à-dire, que A est valide en L_1
   - ...ou qu'il est contradictoire de supposer que $\neg A$ est vraie dans un modèle arbitraire relativement à une assignation arbitraire sur le modèle ; ..., normalement il existent des différentes stratégies de preuve sémantique pour un fait logique comme $\vDash_{L_1} A$

Preuves sémantiques en L_1

Exemple 1

À prouver :

(5) $\neg\forall x(Fx) \vDash_{\mathrm{L}_1} \exists x(\neg Fx)$

'Il existe un x qui n'est pas F' est une conséquence logique de 'Il n'est pas le cas que tous les x sont F' en L_1.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\neg\forall x(Fx) \vDash_{L_1} \exists x(\neg Fx)$ – I

- Par la définition de conséquence logique, cette assertion est correcte ssi pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et pour toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx)$, alors $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(\neg Fx)$.
- Notre but est de montrer que pour chaque modèle et pour chaque assignation, si $\neg\forall x(Fx)$ est vraie dans le modèle et relativement à l'assignation, alors $\exists x(\neg Fx)$ l'est aussi
- Notre stratégie est de montrer que les deux formules ont les mêmes conditions de vérité dans un modèle arbitraire et relativement à une assignation arbitraire

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\neg\forall x(Fx) \vDash_{L_1} \exists x(\neg Fx)$ – II

- Considérons les conditions de vérité de la formule $\neg\forall x(Fx)$, notre hypothèse, pour un modèle arbitraire $\mathfrak{M}$ et une assignation (sur ce modèle) ρ qui est également arbitraire :
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx)$ ssi $\mathfrak{M}, \rho \nVdash \forall x(Fx)$. (clause 2)
  - $\mathfrak{M}, \rho \nVdash \forall x(Fx)$ ssi **il n'est pas le cas que** pour toute assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Fx$. (clause 8)
  - Cette condition est satisfaite ssi il n'est pas le cas que pour toute assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho'(x) \in I_{\mathfrak{M}}(F)$.
  - Et cette condition est satisfaite ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, telle que $\rho'(x) \notin I_{\mathfrak{M}}(F)$
  - Alors, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, telle que $\rho'(x) \notin I_{\mathfrak{M}}(F)$.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\neg\forall x(Fx) \vDash_{L_1} \exists x(\neg Fx)$ – III

- Puis considérons les conditions de vérité de la formule $\exists x(\neg Fx)$, également pour un modèle arbitraire $\mathfrak{M}$ et une assignation arbitraire ρ :
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(\neg Fx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, tel que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash \neg Fx$. (clause 7)
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(\neg Fx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, tel que $\mathfrak{M}, \rho' \nVdash Fx$. (clause 2)
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(\neg Fx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, tel que $\rho'(x) \notin I_{\mathfrak{M}}(F)$. (clause 1)
- Nous avons donc montré que les formules ont les mêmes conditions de vérité dans un modèle arbitraire et relativement à une assignation arbitraire
- Donc, nous avons montré que les deux formules sont en fait équivalentes[1] et cela implique que l'une est conséquence de l'autre et donc que $\neg\forall x(Fx) \vDash_{L_1} \exists x(\neg Fx)$

CQFD

1. C'est-à-dire que $\neg\forall x(Fx) \vDash_{L_1} \exists x(\neg Fx)$ et que $\exists x(\neg Fx) \vDash_{L_1} \neg\forall x(Fx)$

Preuves sémantiques en L_1

Invalidité : La méthode du contrexemple

- Comment peut-on montrer qu'une formule A n'est pas valide en L_1 ?
- On peut construire un contrexemple à A : un modèle dans lequel A est fausse relativement à une assignation sur ce modèle
- Comme une formule valide est vraie dans tous les modèles relativement à toutes les assignations, l'existence d'un contrexemple montre que la formule n'est pas valide en L_1

Preuves sémantiques en L_1

Exemple

À prouver :

(4) $\not\models_{\mathsf{L}_1} \exists x(Rxx)$

'Il existe un x qui est en relation R avec soi-même.' n'est pas valide en L_1.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \exists x(Rxx)$ – I

- Notre définition de la vérité dans un modèle et relativement à une assignation nous dit que :
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(Rxx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, telle que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Rxx$. (clause 7)
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(Rxx)$ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, telle que $\rho'(\langle x, x\rangle) \in I(R)$. (clause 1)

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\nvDash_{L_1} \exists x(Rxx)$ – II

- Pour montrer que $\nvDash_{L_1} \exists x(Rxx)$ il suffit de construire un modèle dans lequel cette formule est fausse relativement à une assignation. Considérons le modèle suivant :
  - $\mathfrak{M}_4 = \langle U_4, I_4 \rangle$
  - $U_4 = \{Jacques\}$
  - $I_4(R) = \emptyset$
- Considérons également une assignation sur $\mathfrak{M}_4$:
  - $\rho_4(x) = Jacques$
- Ce modèle et cette assignation sur le modèle nous donnent un contrexemple : $\mathfrak{M}_4, \rho_4 \nVdash \exists xRxx$, car il existe une assignation ρ'_4 sur $\mathfrak{M}_4$ qui diffère de ρ_4 au maximum en x, telle que $\rho'_4(\langle x, x \rangle) \notin I_4(R)$
- C'est ρ_4 elle-même $(\rho_4 = \rho'_4)$! – $\langle Jacques, Jacques \rangle \notin \emptyset$
- Alors il existe un contrexemple à $\exists x(Rxx)$ et cela montre que $\nvDash_{L_1} \exists x(Rxx)$.

CQFD.

Preuves sémantiques en L_1

Exemple

À prouver :

(5) $\not\models_{\mathrm{L}_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$

'S'il n'est pas le cas que tout x est F, alors tout x n'est pas F.' n'est pas valide en L_1.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \to \forall x(\neg Fx)$ – I

- Intuitivement, la raison pour laquelle (5) est une assertion correcte est claire :
- Le fait qu'il n'est pas le cas que tous les objets sont F n'implique pas en général que tous les objets ne sont pas F
- Il peut être le cas que certains objets, mais pas tous, sont F.
- Il reste à prouver ce fait sur la base de notre sémantique !

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ – II

Le premier pas : déterminer les conditions de vérité pour la formule $\neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$:

- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ ssi $\mathfrak{M}, \rho \nVdash \neg\forall x(Fx)$ **ou** $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall x(\neg Fx)$. (clause 5)
- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ ssi $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\neg\forall x(Fx)$ (clause 2) **ou** $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall x(\neg Fx)$.
- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ ssi $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall x(Fx)$ (car en général, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ ssi $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\neg A$) **ou** $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall x(\neg Fx)$.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ – III

- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ **ssi** (pour toute assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Fx$ (clause 8) **ou** pour toute assignation ρ'' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\mathfrak{M}, \rho'' \Vdash \neg Fx$ (clause 8)).
- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ **ssi** (pour toute assignation ρ' qui diffère de ρ au maximum en x, $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Fx$ **ou** pour toute assignation ρ'' qui diffère de ρ au maximum en x, $\mathfrak{M}, \rho'' \nVdash Fx$ (clause 2)).
- $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ **ssi** (pour toute assignation ρ' qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho'(x) \in I(F)$ (clause 1) **ou** pour toute assignation ρ'' qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho''(x) \notin I(F)$ (clause 1)).

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{\mathrm{L}_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ – IV

- Dans le contexte de cette preuve, un contrexemple est un modèle dans lequel $\neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ est fausse relativement à une assignation ρ sur ce modèle
- Dans un tel modèle, la condition de vérité que nous venons de dériver n'est pas satisfaite
- C'est-à-dire que, dans un tel modèle, **il n'est pas le cas que** (pour toute assignation ρ' qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho'(x) \in I(F)$ **ou** pour toute assignation ρ'' qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho''(x) \notin I(F)$)

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\nvDash_{L_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ – V

- En d'autres termes, un modèle $\mathfrak{M}$ nous donne un contrexemple à $\neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ si deux conditions sont remplies :[2]
  1. Relativement à une assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, il n'est pas le cas que pour toute assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho'(x) \in I(F)$ **et**
  2. il n'est pas le cas que pour toute assignation ρ'' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, $\rho''(x) \notin I(F)$
- Construisons un tel modèle !

2. Ici nous avons appliqué l'une des lois de De Morgan : $\neg(p \vee q)$ est équivalent à $\neg p \wedge \neg q$.

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ – VI

- Un modèle qui nous donne un contrexemple à $\neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$
  - $\mathfrak{M}_5 = \langle U_5, I_5 \rangle$
  - $U_5 = \{g, h\}$
  - $I_5(F) = \{g\}$
- Considérons l'assignation ρ_5 sur $\mathfrak{M}_5$:
  - $\rho_5(x) = h$
- Relativement à cette assignation, $\neg\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(\neg Fx)$ est fausse dans $\mathfrak{M}_5$
- Pourquoi ? – Parce qu'il existe une assignation ρ_5' qui diffère de ρ_5 au maximum en x, telle que $\rho_5'(x) \notin I_5(F)$. C'est ρ_5 elle-même, car $h \notin \{g\}$
- Donc $\mathfrak{M}_5$ remplit la condition 1

Preuves sémantiques en L_1

Preuve sémantique de $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \to \forall x(\neg Fx)$ – VII

- Il reste à montrer que $\mathfrak{M}_5$ remplit aussi la condition 2
- Pour le montrer, considérons une autre assignation sur $\mathfrak{M}_5$:
  - $\rho_5''(x) = g$
- Nous voyons que $\rho_5''(x) \in I_5(F)$ car $g \in \{g\}$
- Comme ρ_5'' diffère au maximum en x de ρ_5, $\mathfrak{M}_5$ remplit aussi la condition 2
- Par conséquent, $\mathfrak{M}_5$ nous donne un contrexemple à $\neg\forall x(Fx) \to \forall x(\neg Fx)$
- Nous avons donc montré que $\not\models_{L_1} \neg\forall x(Fx) \to \forall x(\neg Fx)$

CQFD

Quelques exemples de formules valides de L_1

- Toutes les vérités logiques de la logique des prédicats (p. ex. $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $A \rightarrow A$, etc.) **sont également valides en logique des prédicats**
- $\vDash_{L_1} \forall x(Fx) \rightarrow Fa$ (pour n'importe quelle constante a)
- $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ (pour n'importe quelle constante a)
- $\vDash_{L_1} \neg\forall x(A) \leftrightarrow \exists x(\neg A)$
- $\vDash_{L_1} \neg\exists x(A) \leftrightarrow \forall x(\neg A)$
- Les deux formules valides précédentes impliquent que $\vDash_{L_1} \neg\forall x(\neg A) \leftrightarrow \exists x(A)$ et $\vDash_{L_1} \neg\exists x(\neg A) \leftrightarrow \forall x(A)$
- Cela montre que le quantificateur universel $\forall$ peut être défini au moyen du quantificateur existentiel $\exists$ (en combinaison avec la négation) et vice versa

Quelques exemples de formules valides de L_1

- $\vDash_{L_1} \forall x \forall y(A) \leftrightarrow \forall y \forall x(A)$
- $\vDash_{L_1} \exists x \exists y(A) \leftrightarrow \exists y \exists x(A)$
- $\vDash_{L_1} \forall x(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x(A) \wedge \forall x(B))$
- $\vDash_{L_1} \exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists x(A) \vee \exists x(B))$
- $\vDash_{L_1} \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x(A) \rightarrow \forall x(B))$
- $\vDash_{L_1} \forall x(A) \leftrightarrow A$ (où x n'est pas libre dans A)
- $\vDash_{L_1} \exists x(A) \leftrightarrow A$ (où x n'est pas libre dans A)
- Si $\vDash_{L_1} A$, alors $\vDash_{L_1} \forall x(A)$