Introduction à la logique des prédicats IV

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 30 mars 2020

Sémantique de L_1

- Pour abréger notre sémantique, nous introduisons le symbole "$\Vdash$" ; "$\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$" signifie "$A$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ" et "$\mathfrak{M}, \rho \nVdash A$ que A n'est pas vraie dans le modèle $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
- Au lieu de ce symbole, on utilise souvent aussi "$\models$", mais ce n'est pas possible pour nous, puisque ce deuxième symbole dénote déjà la relation de conséquence logique
- Voilà la version reformulée de la sémantique :

La sémantique de L_1

Définition : vérité dans un modèle relativement à une assignation

- Soit $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ un modèle, ρ une assignation sur $\mathfrak{M}$, A et B des formules de L_1, P_i^n un prédicat $n - aire$ dans l'alphabet de L_1, soit v une variable dans l'alphabet de L_1, soit chaque $t_k \in \{t_1, \ldots, t_n\}$ une variable ou une constante dans l'alphabet de L_1 et soit $\rho I(t_k)$: $\rho(t_k)$ si t_k est une variable et $I(t_k)$ si t_k est une constante

1. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ si et seulement si $\langle \rho I(t_1), \ldots, \rho I(t_n) \rangle \in I(P_i^n)$.
2. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \neg A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \nVdash A$.
3. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \wedge B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ et $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
4. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \vee B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ ou $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
5. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \rightarrow B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \nVdash A$ ou $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
6. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A \leftrightarrow B$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$ si et seulement si $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$.
7. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists v(A)$ si et seulement si il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en v, telle que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash A$.
8. $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \forall v(A)$ si et seulement si pour toutes les assignations ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffèrent de ρ au maximum en v, $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash A$.

La sémantique de L_1

Explication de la clause 1.

- Cette clause est la généralisation de la définition préliminaire de la vérité dans un modèle précédemment discuté, selon laquelle une formule de la forme Fa est vraie dans un modèle (relativement à une assignation sur le modèle) ssi la référence de a est dans l'extension de F dans ce modèle
- Pour une relation d'arité k, la clause nous demande de vérifier si l'ensemble ordonné de k éléments – l'ordre étant déterminé par l'ordre des arguments auxquels la relation est appliquée – est un élément de l'extension de cette relation
- La clause 1. nous permet d'évaluer toutes les formules atomiques de L_1 dans un modèle relativement à une assignation

La sémantique de L_1

Explication des clauses 2.–6.

- Les connecteurs logiques de L_1 correspondent aux mêmes vérifonctions que les connecteurs logiques de L_0
- En fait, si on ignore la structure logique des formules atomiques de L_1, les clauses 2.–6. spécifient exactement les mêmes conditions de vérité que les tables de vérité qui définissent la sémantique des connecteurs logiques de L_0

La sémantique de L_1

Explication de la clause 7.

- Une formule de la forme $\exists v(A)$ nous dit qu'il existe au moins un objet qui correspond exactement à ce que A nous dit sur v (v étant une variable)
- Si A ne contient aucune occurrence libre de v, $\exists v(A)$ est en fait équivalent à A
- Si A dans $\exists v(A)$ contient au moins une occurrence libre de v, cette occurrence (ou ces occurrences) est liée au quantificateur $\exists v$

La sémantique de L_1

Explication de la clause 7.

- P. ex. la formule de L_1 ‘$\exists x_0(P^1_0 x_0)$’ nous dit qu’il y a un objet qui a la propriété que lui attribue P^1_0
- Cet objet peut être n’importe quel objet (dans U)
- Comment peut-on vérifier si un tel objet existe dans un modèle ?
- Une méthode pour le faire est de considérer chaque objet dans l’univers du modèle et de vérifier s’il *satisfait* la formule A
- Si on trouve un tel objet (ou bien plusieurs), la formule de la forme $\exists v(A)$ est vraie (dans le modèle et relativement à l’assignation)

La sémantique de L_1

Explication de la clause 7.

- Un objet satisfait une formule ouvert de la forme A qui contient une ou plusieurs occurrences libres d'une variable v dans un modèle $\mathfrak{M}$ et relativement à une assignation ρ qui associée cet objet à v ssi relativement à ρ, A est vraie
- En d'autres termes, s'il est le cas que l'objet associé à v par ρ est exactement conforme à ce que A nous dit de v
- Si A est une formule complexe on utilise les règles 1.-8. pour déterminer si c'est le cas, ou non
- P. ex. si A contient une conjonction, on utilise la clause 3 pour déterminer la valeur de vérité de A dans un modèle et relativement à une assignation

La sémantique de L_1

Explication de la clause 7.

- Le rôle des assignations dans la clause 7. est donc de nous permettre d'associer aux occurrences de la variable libre v dans A tous les différents objets dans l'univers pour vérifier si au moins l'un de ces objets satisfait A dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
- Pourquoi y a-t-il une restriction aux assignations qui changent seulement l'objet associé à v, mais laissent les objets associés aux autres variables inchangés ?
- Parce-que seul la référence de v, la variable liée au quantificateur, nous intéresse
- Les références associées aux autres variables ne sont pas pertinentes pour déterminer s'il existe un objet qui satisfait A

La sémantique de L_1

Application de 7.

Exemple : le modèle $\mathfrak{M}_3$

Considérez encore une fois un fragment de L_1 qui contient :

- une constante a
- les variable x, y, z
- le prédicats F (unaire), qui correspond à 'est sur Terre',
- le prédicat G (binaire), qui correspond à 'est à l'est de'

Le modèle $\mathfrak{M}_3$:

- $\mathfrak{M}_3 = \langle U_3, I_3 \rangle$
- $U_3 = \{$Dublin,Neuchâtel,La Tour Eiffel$\}$
- $I_3(a) =$ La Tour Eiffel
- $I_3(F) = \{$Dublin,Neuchâtel,La Tour Eiffel$\}$
- $I_3(G) = \{\langle$Neuchâtel,La Tour Eiffel$\rangle, \langle$Neuchâtel,Dublin$\rangle, \langle$La Tour Eiffel,Dublin$\rangle\}$

La sémantique de L_1

Application de 7.

Exemple : le modèle $\mathfrak{M}_3$

Notez qu'il existe 27 assignations différentes correspondant aux variables de ce fragment de (trois variables et trois références possibles pour chaque variable, soit combinaisons possibles) ; on peut les visualiser en utilisant la table 1 :

Table – Représentation des assignations sur $\mathfrak{M}_3$ (partielle)

x	y	z
Dublin	Dublin	Dublin
Dublin	Dublin	Neuchâtel
Dublin	Neuchâtel	Dublin
⋮	⋮	⋮
la Tour Eiffel	Neuchâtel	la Tour Eiffel
la Tour Eiffel	la Tour Eiffel	Neuchâtel
la Tour Eiffel	la Tour Eiffel	la Tour Eiffel

La sémantique de L_1

Application de 7.

Exemple : le modèle $\mathfrak{M}_3$

Pour pouvoir appliquer notre définition de la vérité dans un modèle et relativement à une assignation, nous allons nous focaliser sur deux de toutes ces assignations sur $\mathfrak{M}_3$, ρ_3 et ρ'_3 comme illustré par les deux tables suivantes :

TABLE – ρ_3

x	y	z
Dublin	Dublin	La Tour Eiffel

TABLE – ρ'_3

x	y	z
Neuchâtel	Dublin	La Tour Eiffel

La sémantique de L_1

Application de 7.

Exemple : le modèle $\mathfrak{M}_3$

Considéron la formule :

(1) $\exists x(Gxa \wedge Fa))$

Cette formule est-elle vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3
$(\mathfrak{M}_3, \rho_3 \Vdash \exists x(Gxa \wedge Fa))$?

La sémantique de L_1

Application de 7.

Explication informelle de l'évaluation sémantique de (1) en $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- Selon la traduction de F et G spécifié auparavant, '$\exists x(Gxa \wedge Fa)$' dit qu'il y a un objet qui est tel qu'il est à l'est de La Tour Eiffel et que La Tour Eiffel est sur Terre
- Informellement, pour déterminer si cette formule est vraie ou fausse (et avec elle l'assertion correspondante en langage naturel !), nous considérons tous les objets dans l'univers de notre modèle.

La sémantique de L_1

Application de 7.

Explication informelle de l'évaluation sémantique de (1) $\exists x(Gxa \wedge Fa))$ en $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- Neuchâtel satisfait la formule – l'assertion que Neuchâtel est à l'est de La Tour Eiffel et que La Tour Eiffel est sur Terre est vraie, parce qu'il est vrai (dans le modèle) que Neuchâtel est à l'est de La Tour Eiffel et il est vrai (dans le modèle) que La Tour Eiffel est sur Terre (les deux formules connectées par la conjonction sont vraies)
- Dublin ne la satisfait pas – il n'est pas vrai que Dublin est à l'est de La Tour Eiffel (l'une des deux formules connectées par la conjonction est fausse)
- (Evidemment on peut s'arrêter ici, comme on a déjà trouvé un objet qui satisfait la formule avec Neuchâtel)
- La Tour Eiffel ne la satisfait pas non plus – elle n'est pas à l'est d'elle-même (le premier conjoint est faux)

Résultat : (1) est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3 !

La sémantique de L_1

Application de 7.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (1) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- $\mathfrak{M}_3, \rho_3 \Vdash \exists x(Gxa \wedge Fa)$ si et seulement si il existe une assignation ρ sur $\mathfrak{M}_3$ qui diffère de ρ_3 au maximum en x, telle que $\mathfrak{M}_3, \rho \Vdash Gxa \wedge Fa$. – (7. appliqué à (1))

Une telle assignation existe : l'assignation ρ'_3 ! – Pour vérifier ce fait, nous devons vérifier que

(2) $Gxa \wedge Fa$

est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ'_3 :

La sémantique de L_1

Application de 7.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (1) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- $\mathfrak{M}_3, \rho_3' \Vdash Gxa \wedge Fa$ si et seulement si $\mathfrak{M}_3, \rho_3' \Vdash Gxa$ et $\mathfrak{M}_3, \rho_3' \Vdash Fa$. – (3. appliquée à (2))
- Considérons le premier conjoint de (2), *Gxa* :
    - $\mathfrak{M}_3, \rho_3' \Vdash Gxa$ si et seulement si $\langle \rho_3' I_3(x), \rho_3' I_3(a) \rangle \in I_3(G)$. – (1. appliqué au premier conjoint de (2))
    - Comme $\rho_3'(x) =$Neuchâtel, $I_3(a) =$La Tour Eiffel, et $I_3(G) = \{\langle$Neuchâtel,La Tour Eiffel$\rangle, \langle$Neuchâtel,Dublin$\rangle, \langle$La Tour Eiffel,Dublin$\rangle\}$, cette condition est satisfait. – *Gxa* est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3'.

La sémantique de L_1

Application de 7.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (1) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- Considérons le deuxième conjoint de (2), Fa :
  - $\mathfrak{M}_3, \rho_3' \Vdash Fa$ si et seulement si $\{\rho_3' I_3(a)\} \in I_3(F)$ [1] – (1. appliquée au deuxième conjoint de (2))
  - Comme $I_3(a) =$La Tour Eiffel et $I_3(F) = \{$Dublin,Neuchâtel,La Tour Eiffel$\}$, cette condition est satisfaite. – Fa est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3'.
- Nous avons donc montré qu'il existe une assignation sur $\mathfrak{M}_3$ telle que $Gxa \wedge Fa$ est vraie relativement à elle et par conséquence que $\mathfrak{M}_3, \rho_3 \Vdash \exists x(Gxa \wedge Fa)$!

CQFD. (*Ce qu'il fallait démontrer* ; utilisé pour indiquer la fin d'une preuve)

1. Notez que $\langle x \rangle = \{x\}$. C'est une conséquence de notre définition d'un ensemble ordonné !

La sémantique de L_1

Explication de la clause 8.

- Une formule de la forme $\forall vA$ signifie que ce que A dit de v s'applique à tous les objets
- (Si A ne contient pas d'occurrence libre de v, la remarque faite sur 7. s'applique ici aussi : on peut ignorer le quantificateur et utiliser les clauses 1.-8. pour évaluer A)
- Dans le cas normal, A contient au moins une occurrence libre de la variable v qui est liée au quantificateur $\forall v$ dans $\forall vA$
- P. ex. la formule de L_1 "$\forall x_0(P^1_0 x_0)$" nous dit que tout objet a la propriété que P^1_0 lui attribue

La sémantique de L_1

Explication de la clause 8.

- La différence sémantique principale entre $\exists$ et $\forall$:
- Pour déterminer si une formule de la forme "$\forall vA$" est vraie dans un modèle et relativement à une assignation, il faut considérer toutes les assignations (pertinentes) sur le modèle et vérifier que chaque assignation associe à v un objet qui satisfait A – si c'est le cas pour tous les objets dans l'univers du modèle, la formule est vraie
- Les remarques sur la satisfaction s'appliquent également à 8.

La sémantique de L_1

Exemple : application de 8.

Considérons le même fragment de L_1 et le même modèle $\mathfrak{M}_3$ et la formule suivante :

$$(3)\quad \forall x(Fa \rightarrow Fx)$$

À prouver : (3) est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

La sémantique de L_1

Exemple : application de 8.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (3) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- $\mathfrak{M}_3, \rho_3 \Vdash \forall x(Fa \rightarrow Fx)$ si et seulement si pour toutes les assignations ρ sur $\mathfrak{M}_3$ qui diffèrent de ρ_3 au maximum en x, $\mathfrak{M}_3, \rho \Vdash Fa \rightarrow Fx$. – (8. appliquée à (3))
- Pour établir la vérité de (3) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3, nous allons montrer que relativement à une assignation arbitraire ρ' sur $\mathfrak{M}_3$ qui diffère de ρ_3 au maximum en x, la formule suivante est vraie :

(4) $Fa \rightarrow Fx$

La sémantique de L_1

Exemple : application de 8.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (3) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- $\mathfrak{M}_3, \rho' \Vdash Fa \rightarrow Fx$ si et seulement si $\mathfrak{M}_3, \rho' \nVdash Fa$ ou $\mathfrak{M}_3, \rho' \Vdash Fx$. – (5. appliquée à (4))
- Considérons le conséquent de (2) :
- $\mathfrak{M}_3, \rho' \Vdash Fx$ si et seulement si $\rho' I_3(x) \in I_3(F)$. – (1. appliquée au conséquent de (4))
- Cette condition est satisfait :
- Par hypothèse, ρ' est une assignation sur $\mathfrak{M}_3$ qui diffère de ρ_3 au maximum en x
- Chaque assignation sur $\mathfrak{M}_3$, ce qui inclut ρ', associe forcément à x un des objets dans $U_3 = \{$Dublin,Neuchâtel,La Tour Eiffel$\}$.
- Comme $U_3 = I_3(F)$, peu importe l'objet, cet objet est toujours un élément de $I_3(F)$.

La sémantique de L_1

Exemple : application de 8.

Application de la sémantique de L_1 : vérité de (3) dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à ρ_3

- Comme ρ' était arbitraire (les propriétés particulières de ρ' ne sont d'aucune importance, sauf pour les deux propriétés spécifiées dans 8.), nous pouvons conclure que le conséquent de (4) est vraie dans $\mathfrak{M}_3$ relativement à toutes les assignations
- Comme (4) est vraie si son conséquent est vraie, nous avons $\mathfrak{M}_3, \rho \Vdash Fx$ pour toute ρ ce qui nous permet finalement d'obtenir $\mathfrak{M}_3, \rho_3 \Vdash \forall x(Fa \rightarrow Fx)$

CQFD.

La sémantique de L_1

Validité et conséquence logique en L_1

- Comme en L_0, nous pouvons aussi définir une notion de conséquence logique en L_1
- Nous utilisons le symbole "$\vDash_{L_1}$" pour exprimer cette notion
- Si une formule A est une conséquence logique de l'ensemble vide des hypothèse, soit $\vDash_{L_1} A$, on dit que A est (une vérité logique de L_1) ou que A est valide en L_1

La sémantique de L_1

Validité et conséquence logique en L_1

- Les définitions des deux termes utilisent la notion de vérité dans un modèle et relativement à une assignation

Définition : validité en L_1 $\vDash_{L_1} A$ si et seulement si pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et pour toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$

Définition : conséquence logique en L_1 $\Gamma \vDash_{L_1} A$ si et seulement si pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, si pour toutes les formules $B \in \Gamma$, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash B$, alors $\mathfrak{M}, \rho \Vdash A$.[2]

- Un modèle et une assignation ensemble nous donnent une interprétation sémantique complète de notre langage formel L_1 et l'idée de ces définition est qu'une formule est valide/une vérité logique en L_1 si, peu importe l'interprétation sémantique des formules, elle est vraie

2. Rappel : les lettres grecques dénotent des ensembles des formules. Ici, Γ est un ensemble des formules de L_1

Preuves sémantiques

- Les définitions de la validité et de la conséquence logique, en combinaison avec la définition de la vérité dans un modèle relativement à une assignation, nous donnent une méthode formelle pour vérifier si une formule est une conséquence logique d'un ensemble de formules ou si elle est valide en L_1
- Cette méthode formelle est moins schématique que la déduction naturelle ou la méthode des arbres que nous avons déjà rencontrées
- Pour construire une preuve sémantique, il faut choisir une stratégie de preuve qui nous permet d'appliquer les clauses sémantiques 1.-8. – un exemple d'une telle stratégie est la preuve par reductio ad absurdum – on montre que la négation d'une formule est contradictoire pour prouver que cette formule est valide en L_1

Preuves sémantiques

Exemple : $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

Preuve : validité de $Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

À prouver :

(5) $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ (pour n'importe quel a)

La stratégie de preuve – *reductio ad absurdum* :

- Par la définition de $\vDash_{L_1}$, cette assertion est correcte ssi pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et pour toute assignation ρ sur $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$
- Pour montrer que c'est le cas, nous montrons qu'il n'existe pas de modèle $\mathfrak{M}$ et d'assignation ρ sur $\mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{M}, \rho \nVdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$.

Preuves sémantiques

Exemple : $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

Preuve : validité de $Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

Par *reductio ad absurdum*, supposons qu'il existe un tel modèle et une telle assignation :

- $\mathfrak{M}, \rho \nVdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ ssi il n'est pas le cas que : $\mathfrak{M}, \rho \nVdash Fa$ ou $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(Fx)$. – (5. appliquée à (5))
- S'il n'est pas le cas que : $\mathfrak{M}, \rho \nVdash Fa$ **ou** $\mathfrak{M}, \rho \Vdash \exists x(Fx)$, alors il est le cas que $\mathfrak{M}, \rho \Vdash Fa$ **et** $\mathfrak{M}, \rho \nvDash \exists x(Fx)$ – (application d'une des lois de De Morgan (logique des propositions) : $\neg(\neg A \vee B)$ est équivalent à $\neg\neg A \wedge \neg B$ qui est équivalent à $A \wedge \neg B$)
- Considérons le premier conjoint, Fa :
  - $\mathfrak{M}, \rho \Vdash Fa$ ssi $I(a) \in I(F)$.
  - Donc, le modèle doit remplir cette condition

Preuves sémantiques

Exemple : $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

Preuve : validité de $Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

- Considérons le deuxième conjoint, $\exists x(Fx)$:
  - $\mathfrak{M}, \rho \nVdash \exists x(Fx)$ ssi il n'existe pas une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en x, telle que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Fx$.
  - Une telle assignation existe-t-elle ?
  - Nous savons déjà que $\mathfrak{M}$ doit être tel que $I(a) \in I(F)$; c'est-à-dire qu'il doit exister un objet dans U, l'objet associé à la constante a par l'interprétation du modèle, qui est dans l'extension de F.
  - Comme nous devons en principe considérer toutes les assignations possibles sur $\mathfrak{M}$, nous devons en particulier considérer une assignation ρ' qui associe l'objet $I(a)$ à x.
  - Il existe donc une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{M}, \rho' \Vdash Fx$ – mais cela contredit la condition selon laquelle $\mathfrak{M}, \rho \nVdash \exists x(Fx)$.

Preuves sémantiques

Exemple : $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

Preuve : validité de $Fa \rightarrow \exists x(Fx)$

- Alors, la supposition à la base de notre *reductio* implique une contradiction : elle implique que le modèle doit contenir un objet qui est dans l'extension de F, mais simultanément qu'aucun objet n'est dans l'extension de ce prédicat – deux conditions qui ne peuvent pas être remplies par le même modèle
- Comme notre supposition implique une contradiction, nous devons la rejeter : il n'existe pas de modèle et d'assignation sur ce modèle tels que $\mathfrak{M}, \rho \nVdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$.
- Donc, pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et toute assignation ρ, $\mathfrak{M}, \rho \Vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ et cela implique par la définition de la validité en L_1 que $\vDash_{L_1} Fa \rightarrow \exists x(Fx)$.

CQFD.