Introduction à la logique des prédicats III

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 16 mars 2020

Rappel : sémantique classique et compositionnelle

La sémantique de L_1 partage deux propriétés importantes avec la sémantique de L_0 :

1. La sémantique de L_1 est une sémantique classique :
    - Par conséquent, elle est bivalente : elle associe à chaque formule de la valeur de vérité vrai ou la valeur de vérité faux (et pas d'autre valeur de vérité)

Rappel : sémantique classique et compositionnelle

La sémantique de L_1 partage deux propriétés importantes avec la sémantique de L_0 :

2. La sémantique de L_1 est aussi compositionnelle :
   - La valeur de vérité de chaque formule (en particulier de chaque formule complexe) du langage L_1 est déterminée par la distribution complète des valeurs de vérité parmi les formules *atomiques* de ce langage et par leur mode logique de combinaison (cf. la définition de compositionnalité de la sémantique de L_0)
   - Cette idée a été illustrée par les définitions des connecteurs logiques au moyen des tables de vérité
   - Une différence importante entre la sémantique de L_0 et la sémantique de L_1 est que cette dernière reflète la complexité additionnelle du langage – les formules atomiques de L_1 ont une structure logique et la sémantique nous donne leurs conditions de vérité (sur la base de la théorie des ensembles)

Théorie des modèles

- Notre sémantique pour L_1 se base sur le concept du modèle
- Un *modèle* est une structure mathématique qui nous sert à associer à chaque formule de L_1 une signification de façon systématique et précise
- L'idée intuitive est qu'un modèle nous donne une structure qui représente un état possible (d'une partie) du monde – le modèle nous dit de chaque phrase/formule si elle est vraie ou fausse, soit si elle décrit correctement ou non cet état du monde
- Notez bien que la sémantique de L_1 ne remplace pas une théorie de la signification ; elle laisse sans réponse beaucoup de questions philosophiques concernant la signification (p. ex. questions quant à la compréhension des mots, questions concernant la référence des noms propres, questions pragmatiques concernant l'usage des mots, etc.)

Théorie des modèles

Définition : modèle Un modèle $\mathfrak{M}$ pour un langage formel L est un couple $\langle U, I \rangle$, où U (l'univers) est un ensemble non-vide et I (l'interprétation) est une fonction qui associe à chaque constante a dans l'alphabet de L un élément $I(a)$ de U, et à chaque prédicat n-aire F dans l'alphabet de L un ensemble des ensembles ordonnés de n éléments de U.

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

Les modèles en général

- Les modèles sont "le squelette" de notre sémantique ; ils sont les structures qui permettent à notre sémantique d'interpréter les phrases de notre langage formel
- Un modèle est une structure complexe d'ensembles : elle est un ensemble ordonné qui contient un ensemble d'objets (l'univers) et une fonction, soit un ensemble d'ensembles ordonnés (l'interprétation)
- Notez que la définition de modèle nous permet de construire un nombre infini de modèles différents : pour toute combinaison d'univers et interprétation, il existe un modèle de L_1

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

L' univers *U*

- L'*univers* peut être n'importe quel ensemble non-vide
- On peut choisir un ensemble approprié à la tâche, soit un ensemble qui contient tous les objets qui sont pertinents pour l'évaluation des phrases dans un contexte particulier – p. ex. si on veut évaluer des phrases qui portent seulement sur les objets matériels dans une salle de cours, on peut choisir un modèle tel que l'univers contenu dans le modèl est l'ensemble de ces objets matériels

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

L'interprétation I

- Un modèle spécifie une interprétation pour chaque symbole de l'alphabet de L_1 qui n'est pas une variable, un connecteur logique, ou un quantificateur (ou une parenthèse, comme ces symboles sont des symboles auxiliaires)
- On peut donc dire que chaque modèle contient déjà une sémantique limitée, une sémantique des constantes et des prédicats
- La partie d'un modèle qui joue ce rôle est l'interprétation I, une fonction qui prend une constante ou un prédicat comme entrée et nous donne comme résultat un objet qui est élément de l'univers U (si l'entrée est une constante) ou un ensemble des objets en U (si l'entrée est un prédicat)

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

L'interprétation I

- $I(a)$ dénote le résultat de l'application d'I à a, c'est-à-dire le résultat de I avec a comme entrée – $I(a)$ est donc utilisé comme un nom d'objet, et $I(P)$ comme un nom d'un ensemble d'objets
- On appelle l'objet associé à une constante par I sa *référence* et l'ensemble associé à un prédicat par I son *extension*

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

Pourquoi le modèle ne spécifie-t-il pas une interprétation des variables ?

- Comme *les variables* ne dénotent pas d'objets particuliers, elles n'ont pas une interprétation fixe dans un modèle
- Pour évaluer les formules ouvertes de L_1, notre sémantique utilise une deuxième fonction qui ressemble à l'interprétation et qui est indépendante du modèle – voir plus bas

Théorie des modèles

Commentaires sur la définition de modèle

Pourquoi le modèle ne spécifie-t-il pas une interprétation des connecteurs logiques et des quantificateurs ?

- Le modèle ne nous donne pas une interprétation des *connecteurs logiques* et des *quantificateurs* pour deux raisons :
  1. contrairement aux constantes ou aux prédicats, ils n'ont pas une référence ou une extension qui soit composée (d'ensembles) d'objets de U
  2. l'une des suppositions fondamentales de la sémantique de L_1 est que les connecteurs logiques et les quantificateurs ont des significations qui ne varient pas entre les modèles – les conditions de vérité pour eux sont les mêmes dans chaque modèle et ils sont défini par la définition de vérité dans un modèle

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Exemples de modèles

- L_1 est un langage très riche ; les exemples suivants sont des modèles pour une version restreinte de L_1 avec un alphabet réduit aux deux constantes a, b et aux deux prédicats F (unaire) et G (binaire)

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Le modèle $\mathfrak{M}_1$

- $\mathfrak{M}_1 = \langle U_1, I_1 \rangle$
- $U_1 = \{$Neuchâtel,Berne,Le Lac Baïkal,La Tour Eiffel$\}$
- $I_1(a) =$ Neuchâtel
- $I_1(b) =$ Berne
- $I_1(F) = \{$Neuchâtel,Berne$\}$
- $I_1(G) = \{\langle$Le Lac Baïkal,Berne$\rangle\langle$Le Lac Baïkal,Neuchâtel$\rangle$, $\langle$Le Lac Baïkal, La Tour Eiffel$\rangle$, $\langle$Berne, Neuchâtel$\rangle$, $\langle$Berne, La Tour Eiffel$\rangle$, $\langle$Neuchâtel, La Tour Eiffel$\rangle\}$

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Commentaires sur le modèle $\mathfrak{M}_1$ et sur les modèles en général

- I spécifie la signification des prédicats du point de vue extensionnel – deux prédicats P et Q ont la même signification dans un modèle s'ils ont la même extension, c'est-à-dire que les propriétés ou relations qui correspondent à P et Q s'appliquent exactement aux mêmes objets
- Notez que deux éléments de U_1 ne sont pas associés à une constante comme référence (Lac Baïkal, La Tour Eiffel) et qu'un des deux objets (La Tour Eiffel) n'est pas non plus dans l'extension d'un prédicat
- En général, I peut être une fonction partielle sur U – I peut associer seulement quelques objets ou prédicats aux objets et sous-ensembles de U et n'assigner aucune signification aux autres (p. ex. des objets qui n'ont pas de nom propre en langage naturel)

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Commentaires sur le modèle $\mathfrak{M}_1$ et sur les modèles en général

- *I* peut aussi associer l'ensemble vide comme extension à des prédicats (pensez à un prédicat qui attribue une propriété qu'aucun objet dans U ne possède, comme p. ex. "est un cercle carré") – notez qu'il y a une différence importante entre ce cas et le cas précédent (n'associer aucune signification VS associer une signification vide)
- Il est important de noter que dans la sémantique classique de L_1, un modèle ne peut jamais contenir une interprétation qui laisse une constante sans référence – il n'y a pas de constante sans référence dans les modèles de notre sémantique
- (Notez que est une relation irréflexive (= pas réflexive), asymétrique et transitive)

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Commentaire sur les modèles et la formalisation

- Les constantes correspondent à des noms propres en langage naturel (Alex, Sandra, Augustin, La Tour Eiffel, Neuchâtel,. . .)
- L'interprétation des constantes dans un modèle est cohérente avec la théorie standard des noms propres en philosophie du langage : cette théorie nous dit que la signification d'un nom propre est l'objet qui le porte (c'est-à-dire sa référence) – à ce sujet, voyez p. ex. le livre de Saul Kripke "La logique des noms propres"/"Naming and Necessity"

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Commentaire sur les modèles et la formalisation

- Notez qu'un même modèle peut être compatible avec plusieurs traductions différentes des prédicats de langage naturel en langage formel
- Relativement à $\mathfrak{M}_1$, nous pouvons p. ex. interpréter F comme la traduction de "est une ville" et G comme la traduction de "est à l'est de", mais d'autres interprétations sont possibles
- P. ex. on peut alternativement interpréter F comme "est une ville en Suisse", "a une mairie" ou "est peuplé" et G comme "est une attraction touristique plus populaire que" ou "a un nom qui est plus difficile à prononcer pour R. Michels que"
- Pour cette raison, il est important de toujours introduire explicitement les correspondances entre les éléments du langage naturel et du langage formel

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Le modèle $\mathfrak{M}_2$

- $\mathfrak{M}_2 = \langle U_2, I_2 \rangle$
- $U_2 = \{1, 2\}$
- $I_2(a) = 1$
- $I_2(b) = 2$
- $I_2(F) = \emptyset$
- $I_2(G) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$

Théorie des modèles

Exemples de modèles

Commentaires sur le modèle $\mathfrak{M}_2$

- Dans ce modèle, F peut être la traduction de “est un nombre naturel supérieur à 2” et G de “est égal à”
- Notez que si on introduit un deuxième prédicat “vide” qui correspond à une propriété qui ne s'applique à aucun objet dans U, ce prédicat aura aussi l'ensemble vide comme extension – en général, dans un modèle, tous les prédicats vides on la même extension, l'ensemble vide
- (Notez que G est une relation d'équivalence)

Théorie des modèles

Evaluation des formules relativement à un modèle – explication informelle

Considérez toutes les formules atomiques de notre langage restreint :

$Fa, Fb, Gaa, Gab, Gba, Gbb$

- Pour les évaluer, nous pouvons appliquer l'idée introduite lors de la dernière séance : Relativement à un modèle, une formule atomique de la forme Fa est vraie ssi (= si et seulement si) la référence de a est dans l'extension de F et une formule atomique de la forme Gab est vraie ssi le couple $\langle a, b \rangle$ est dans l'extension de G

Théorie des modèles

Evaluation des formules relativement à un modèle – explication informelle

Évaluation de chaque formule de notre langage restreint dans $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$:

	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$
Fa	$I_1(a) \in I_1(F)$ – **V**	$I_2(a) \in I_2(F)$ – **F**
Fb	$I_1(b) \in I_1(F)$ – **V**	$I_2(a) \in I_2(F)$ – **F**
Gaa	$\langle I_1(a), I_1(a)\rangle \in I_1(G)$ – **F**	$\langle I_2(a), I_2(a)\rangle \in I_2(G)$ – **V**
Gab	$\langle I_1(a), I_1(b)\rangle \in I_1(G)$ – **F**	$\langle I_2(a), I_2(b)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gba	$\langle I_1(b), I_1(a)\rangle \in I_1(G)$ – **V**	$\langle I_2(b), I_2(a)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gbb	$\langle I_1(b), I_1(b)\rangle \in I_1(G)$ **F**	$\langle I_2(b), I_2(b)\rangle \in I_2(G)$ – **V**

Théorie des modèles

Evaluation des formules relativement à un modèle – explication informelle

- Cette table contient les traductions en théorie des ensembles et les valeurs de vérité de toutes les formules atomiques de notre langage formel limité
- Comme notre sémantique est compositionnelle, si nous connaissons toutes les valeurs de vérité des formules atomiques, nous pouvons déterminer les valeurs de vérité de toutes les formules complexes qui contiennent les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (mais encore pas les quantificateurs) – les connecteurs logiques correspondent aux mêmes vérifonctions qu'en L_0
- P. ex. nous pouvons déterminer que, relativement à $\mathfrak{M}_1$, la formule $Fa \wedge Gba$ est vraie (parce que Fa et Gba sont vraies dans $\mathfrak{M}_1$) et que, relativement à $\mathfrak{M}_2$, la formule $Gbb \vee Fa$ est vraie (parce que Gbb est vraie dans $\mathfrak{M}_2$)

Théorie des modèles

Variables et formules ouvertes

- L'alphabet de notre langage formel restreint ne contient pas de variables ; ajoutons-les !
- Le nouvel alphabet contient les deux constantes a, b la variable x et les deux prédicats F (unaire) et G (binaire)
- Comme l'interprétation d'un modèle n'associe pas d'objets aux variables, nous ne pouvons pas encore déterminer la valeur de vérité d'une formule ouverte relativement à un modèle

Théorie des modèles

Variables et formules ouvertes

L'assignation

- Pour pouvoir évaluer ces formules, nous allons introduire un élément additionnel dans notre sémantique – l'*assignation de valeurs aux variables* ρ (abréviation : *assignation*)

Définition : assignation Une *assignation de valeurs aux variables* ρ sur un modèle $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ est une fonction qui associe à chaque variable de L_1 un élément de l'univers U de $\mathfrak{M}$.

Théorie des modèles

Variables et formules ouvertes

- L'assignation sur un modèle $\mathfrak{M}$ agit sur les variables comme l'interprétation du modèle le fait sur les constantes – elle associe un objet de $U \in \mathfrak{M}$ *à chaque variable* de notre langage formel relativement à ce modèle
- Notez que les assignations sont des fonctions totales – chaque assignation associe une référence à chaque variable

Théorie des modèles

Variables et formules ouvertes

- Pourquoi ne peut-on pas inclure l'assignation dans le modèle, comme pour l'interprétation ?
- Le rôle fondamental de l'assignation est de capturer la signification des variables libres dans les formules de L_1 (ou de notre langage limité ou d'un autre langage formel qui admet des formules ouvertes)
- Les variables libres n'ont pas de référence déterminée et unique, à la différence des constantes
- Pour conserver cette différence, la référence des variables n'est pas spécifiée par un modèle, mais de façon indépendante
- Ainsi, la signification arbitraire d'une variable libre peut être représentée relativement à un modèle par une variance possible entre différentes assignations qui associent des objets différents à la variable – le modèle seul laisse indéterminée la référence de la variable

Théorie des modèles

Variables et formules ouvertes

- Comme l'objectif de notre sémantique est d'associer une valeur de vérité à chaque formule de L_1, y compris les formules ouvertes, nous devons associer une référence aux variables
- Donc, nous évaluons les formules *dans un modèle* (qui détermine la référence de toutes les constantes et l'extension de tous les prédicats de notre langage) *et relativement à une assignation* (qui associe à chaque variable une référence qu'elle peut avoir relativement au modèle)
- Notez que les clauses sémantiques des quantificateurs se basent aussi sur les assignations

Théorie des modèles

L'évaluation des formules ouvertes – introduction informelle de l'idée

- Dans un modèle $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ et relativement à une assignation ρ, une formule Ft est vraie ssi
    1. si t est une constante, la référence de t $I(t)$ est dans l'extension de F, et
    2. si t est une variable, $\rho(t)$, la référence de t dans $\mathfrak{M}$ et relativement à ρ est un élément de l'extension de F.
- Et pour les relations : relativement à un modèle $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ et à une assignation ρ, une formule Gtt' est vraie ssi le couple $\langle I(t)/\rho(t), I(t')/\rho(t') \rangle$ (qui contient comme premier élément $I(t)$ si t est une constante ou $\rho(t)$ si t est une variable et comme deuxième élément $I(t')$ si t' est une constante ou $\rho(t')$ si t' est une variable) est un élément de l'extension de G
- P. ex. si ρ est une assignation sur $\mathfrak{M}_1$ avec $\rho(x) = \text{Neuchâtel}$, la formule ouverte Gbx est vraie relativement à $\mathfrak{M}_1, \rho$

Théorie des modèles

L'évaluation des formules ouvertes – introduction informelle de l'idée

- Notre nouveau langage formel limité qui inclut des variables contient les formules atomiques suivantes :

$Fa, Fb, Fx, Gaa, Gab, Gax, Gba, Gbb, Gbx, Gxa, Gxb, Gxx$

- Pour illustrer intuitivement l'évaluation des formules ouvertes nous pouvons maintenant introduire une assignation sur $\mathfrak{M}_2$:
  $\rho_1 = \{\langle x, 1\rangle\}$
- Les résultats de l'évaluation de toutes les formules dans $\mathfrak{M}_2$ relativement à ρ_1 sont :

Théorie des modèles

L'évaluation des formules ouvertes – introduction informelle de l'idée

Évaluation des formules dans $\mathfrak{M}_2$ et relativement à $\rho_1 = \{\langle x, 1\rangle\}$

	$\mathfrak{M}_2, \rho_1$
Fa	$I_2(a) \in I_2(F)$ – **F**
Fb	$I_2(b) \in I_2(F)$ – **F**
Fx	$\rho_1(x) \in I_2(F)$ – **F**
Gaa	$\langle I_2(a), I_2(a)\rangle \in I_2(G)$ – **V**
Gax	$\langle I_2(a), \rho_1(x)\rangle \in I_2(G)$ – **V**
Gab	$\langle I_2(a), I_2(b)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gba	$\langle I_2(b), I_2(a)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gbb	$\langle I_2(b), I_2(b)\rangle \in I_2(G)$ – **V**
Gbx	$\langle I_2(b), \rho_1(x)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gxa	$\langle \rho_1(x), I_2(a)\rangle \in I_2(G)$ – **V**
Gxb	$\langle \rho_1(x), I_2(b)\rangle \in I_2(G)$ – **F**
Gxx	$\langle \rho_1(x), \rho_1(x)\rangle \in I_2(G)$ – **V**

Vérité dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ

- Nous avons maintenant introduit tous les éléments nécessaires pour présenter l'élément central de notre sémantique pour L_1, la définition récursive de la vérité dans un modèle et relativement à une assignation

Définition : vérité dans un modèle et relativement à une assignation

- Soit $\mathfrak{M} = \langle U, I \rangle$ un modèle, ρ une assignation sur $\mathfrak{M}$, A et B des formules de L_1, P_i^n un prédicat $n - aire$ dans l'alphabet de L_1, v une variable dans l'alphabet de L_1, soit chaque $t_k \in \{t_1, \ldots, t_n\}$ une variable ou une constante dans l'alphabet de L_1 et soit $\rho/I(t_k)$: $\rho(t_k)$ si t_k est une variable et $I(t_k)$ si t_k est une constante

Définition : vérité dans un modèle et relativement à une assignation

1. $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ si et seulement si $\langle \rho/I(t_1), \ldots, \rho/I(t_n) \rangle \in I(P_i^n)$
2. $\neg A$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi A est fausse dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
3. $A \wedge B$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi A est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ et B est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
4. $A \vee B$ est vraie vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi A est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ou B est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
5. $A \rightarrow B$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi A est fausse dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ou B est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
6. $A \leftrightarrow B$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi A et B ont la même valeur de vérité dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ
7. $\exists v(A)$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi il existe une assignation ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffère de ρ au maximum en v telle que A est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ'
8. $\forall v(A)$ est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ ssi pour toutes les assignations ρ' sur $\mathfrak{M}$ qui diffèrent de ρ au maximum en v, A est vraie dans $\mathfrak{M}$ relativement à ρ'

Définition : vérité dans un modèle et relativement à une assignation

Commentaires sur la définition

- La définition est récursive comme les définitions des formules syntaxiquement bien formées pour L_0 et L_1 : dans 2.-8. nous utilisons le concept de vérité d'une formule dans un modèle relativement à une assignation pour définir la vérité d'une autre formule dans le même modèle relativement à la même assignation, et nous pouvons réappliquer ces clauses sémantiques pour définir les conditions de vérité de toutes les formules de L_1
- La clause 1. est simplement une formulation plus précise et générale des définitions préliminaires – une formule atomique qui consiste en un prédicat et des variables ou constantes est vraie ssi les objets assignés aux variables ou constantes par l'interprétation ou l'assignation sont (dans l'ordre correct en ensemble ordonné si le prédicat est une relation) dans l'extension du prédicat

Définition : vérité dans un modèle et relativement à une assignation

Commentaires sur la définition

- Les conditions de vérité pour les connecteurs logiques 2.-6. sont exactement les mêmes que dans la sémantique pour L_1 présentée sous forme de tables de vérité
- Le principe des conditions de vérité pour les quantificateurs 7.-8. sera expliqué en détail par la suite