Introduction à la logique des prédicats II

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre de printemps 2020 – 2 mars 2020

Variables libres, formules ouvertes et formules fermées

- Les formules de L_1 peuvent contenir des variables qui ne sont pas liées à des quantificateurs – p. ex. les occurrences de "x" dans "Px" et dans "$\exists y(Rxy)$"
- Une telle variable est appelée *variable libre*
- Une formule qui contient une ou plusieurs variables libres est une *formule ouverte*
- Une formule qui n'est pas ouverte est *fermée*
- Cette distinction est très importante pour la traduction des phrases du langage naturel en L_1 : seules les formules fermées correspondent aux phrases du langage naturel car il n'y a pas d'expressions du langage naturel qui correspondent aux variables libres

Variables libres, formules ouvertes et formules fermées

- Notez une particularité des règles de formation 7 et 8 : si on préfixe n'importe quelle formule d'un quantificateur (incluant la variable qui sert à indiquer sa portée), le résultat est toujours une formule – cela inclut p. ex. les formules qui ne contiennent pas de variables ou seulement des variables qui sont déjà liées à d'autres quantificateurs
- P. ex. '$\forall x Pa$', '$\exists y \forall x(Px \rightarrow Qx)$', '$\exists y \forall x((Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow Pb)$' sont des formules bien formées de L_1
- Un quantificateur qui n'est pas lié à une variable ne contribue rien à la signification d'une formule – p. ex. l'occurrence du quantificateur dans "$\forall x(Pa \wedge Qb)$" ne contribue rien à la signification de cette formule ; la différence entre elle et "$(Pa \wedge Qb)$" est purement syntaxique

Théorie des ensembles

- La sémantique de L_1 se base sur quelques concepts de la théorie des ensembles
- Dans cette partie du cours, nous allons brièvement introduire ces concepts
- Nous discuterons la théorie naïve des ensembles plutôt qu'une théorie des ensembles axiomatisée comme la théorie ZF (Zermelo Fraenkel)
- Une deuxième raison pour discuter de quelques éléments de la théorie des ensembles est qu'elle nous permet de caractériser des propriétés formelles des relations qui sont très utiles en logique et, en général, en analyse des concepts

Théorie des ensembles

Ensembles, éléments, appartenance

Nous appelons ensemble toute réunion **M** *d'objets de notre conception, déterminés et bien distincts, que nous nommerons éléments de* **M***. (Georg Cantor 1895)*

Théorie des ensembles

Ensembles, éléments, appartenance

- Un ensemble est une collection d'objets
- Les objets qui appartiennent à un ensemble sont les *éléments* de cet ensemble
- Les éléments d'un ensemble peuvent être n'importe quels objets (pommes, maisons, personnes, nombres, formules d'un langage formel, phrases d'un langage naturel, ...)
- La relation entre un ensemble et ses éléments est la relation d'appartenance (symbole "$\in$"; si un objet a n'appartient pas à un ensemble $\mathbf{S}$, on écrit "$a \notin \mathbf{S}$") : les éléments d'un ensemble lui appartiennent
- Les ensembles sont des objets particuliers et, pour cette raison, ils peuvent être eux-mêmes des éléments d'ensembles

Théorie des ensembles

Spécifier un ensemble

- Il y a deux façons de spécifier un ensemble :
  1. en citant explicitement ses éléments : $\mathbf{S} = \{a, b, c, d\}$ – on dit aussi qu'on définit l'ensemble en extension
  2. en définissant une propriété qu'un objet a si et seulement si il appartient à l'ensemble (définition d'un ensemble en compréhension) : $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 5\}$ – l'ensemble de tous les nombres naturels qui sont supérieurs à 1, mais inférieurs à 5 – en notation explicite : $\mathbf{S} = \{2, 3, 4\}$
- Remarque : le langage de la théorie des ensembles peut en fait être formalisé dans le langage L_1 : le seul prédicat nécessaire est la relation binaire "$\in$"

Théorie des ensembles

Ensemble vide et relations entre ensembles

Ensemble vide et sous-ensemble

Définition : ensemble vide Il existe un seul ensemble qui n'a aucun élément : l'*ensemble vide* $\emptyset$.

Définition : sous-ensemble (ou *partie*) Un ensemble $\mathbf{S}$ est un *sous-ensemble* de $\mathbf{T}$ ($\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$) si et seulement si tous les éléments de $\mathbf{S}$ sont des éléments de $\mathbf{T}$.
($\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T} =_{def} \forall x(x \in \mathbf{S} \to x \in \mathbf{T})$)

Théorie des ensembles

Ensemble vide et relations entre ensembles

Deux remarques sur la définition de sous-ensemble :

- Notez que pour tout ensemble $\mathbf{S}$: $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}$ (car chaque élément de $\mathbf{S}$ est aussi un élément de $\mathbf{S}$)
- Notez aussi que pour tout ensemble $\mathbf{S}$: $\emptyset \subseteq \mathbf{S}$ (car il n'existe aucun objet qui est un élément de $\emptyset$, mais pas de $\mathbf{S}$ – autrement dit, chaque élément de $\emptyset$ est un élément de $\mathbf{S}$), mais que

Théorie des ensembles

Ensemble vide et relations entre ensembles

Identité des ensembles et sous-ensemble strict

Définition : identité des ensembles Les ensembles **S** et **T** sont *identique* ($\mathbf{S} = \mathbf{T}$) si et seulement si ils ont les mêmes éléments.
($\mathbf{S} = \mathbf{T} =_{def} \forall x(x \in \mathbf{S} \leftrightarrow x \in \mathbf{T})$ ou bien :
$\mathbf{S} = \mathbf{T} =_{def} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{T} \land \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S}$)

Définition : sous-ensemble strict Un ensemble **S** est un *sous-ensemble strict* de **T** ($\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{T}$) si et seulement si **S** est un sous-ensemble de **T**, mais pas identique à **T**.
($\mathbf{S} \subsetneq \mathbf{T} =_{def} \mathbf{S} \subseteq \mathbf{T} \land \neg \mathbf{S} = \mathbf{T}$)

Théorie des ensembles

Le point de vue extensionnaliste

- La définition de l'identité des ensembles implique un point de vue dit "extensionnaliste"[1] : un ensemble est exclusivement défini par ses éléments
- Par conséquent, la façon de spécifier un ensemble ne joue aucun rôle dans l'identité de l'ensemble :
- Si a est une constante qui dénote Alex, $\{a\}$ et $\{\text{Alex}\}$ et $\{x : x = a\}$ sont des ensembles identiques
- En général, un ensemble ne peut pas contenir le même élément plusieurs fois
- Par conséquent, $\{a\} = \{a, a\} = \{a, a, a\} \dots$; ce sont seulement trois différentes façons de spécifier le même ensemble ; mais notez aussi que $\{a, \{a\}\} \neq \{a, a\}$, car a et $\{a\}$ sont des objets différentes
- Finalement, les ensembles sont insensibles à l'ordre de leur éléments : $\{a, b\} = \{b, a\}$

1. Nous discuterons du concept d'extension dans les prochaines séances du cours.

Théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles

Réunion, intersection, différence

Définition : réunion des ensembles La *réunion* des ensembles $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ ($\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$) est l'ensemble qui contient tout objet qui est un éléments de $\mathbf{S}$, de $\mathbf{T}$ ou de $\mathbf{S}$ et de $\mathbf{T}$.
($\mathbf{S} \cup \mathbf{T} =_{def} \{x : x \in \mathbf{S} \vee x \in \mathbf{T}\}$)

Définition : intersection des ensembles L'*intersection* des ensembles $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ ($\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$) est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à la fois à $\mathbf{S}$ et à $\mathbf{T}$.
($\mathbf{S} \cap \mathbf{T} =_{def} \{x : x \in \mathbf{S} \wedge x \in \mathbf{T}\}$)

Définition : différence des ensembles La *différence* des ensembles $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ ($\mathbf{S} \setminus \mathbf{T}$) est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à $\mathbf{S}$, mais pas à $\mathbf{T}$.
($\mathbf{S} \setminus \mathbf{T} =_{def} \{x : x \in \mathbf{S} \wedge x \notin \mathbf{T}\}$)

Théorie des ensembles

Le paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell

- Même si la théorie naïve des ensembles nous offre tous les outils formels nécessaires pour introduire la sémantique de la logique des prédicats, elle est en réalité très problématique – Bertrand Russell a prouvé qu'elle est inconsistante :
- Considérez l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes :

$$\mathbf{E} = \{x : x \text{ est un ensemble} \wedge x \notin x\}$$

- La théorie naïve des ensembles nous permet de spécifier cet ensemble

Théorie des ensembles

Le paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell

$$\mathbf{E} = \{x : x \text{ est un ensemble} \wedge x \notin x\}$$

- Cet ensemble, **E**, est-il un élément de lui-même ?
- Si oui (si $\mathbf{E} \in \mathbf{E}$), par définition d'**E** il s'ensuit que $\mathbf{E} \notin \mathbf{E}$
- Si non (si $\mathbf{E} \notin \mathbf{E}$), par définition d'**E** il s'ensuit que $\mathbf{E} \in \mathbf{E}$, car **E** contient tous les ensembles qui ne se contiennent pas
- Dans tous les cas on obtient que $\mathbf{E} \in \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \notin \mathbf{E}$, une contradiction !
- Alors, la théorie naïve nous permet de dériver une contradiction et est donc inconsistante

Théorie des ensembles

Le paradoxe de Russell

- Les théories axiomatiques des ensembles (comme p. ex. la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenckel ZF) excluent les ensembles contradictoires comme **E**
- Comme nous ne nous intéressons pas dans ce cours à la théorie naïve en tant que théorie des ensembles, mais principalement en tant qu'outil pour formuler la sémantique de L_1, ce problème ne nous concerne pas

Théorie des ensembles

Ensembles ordonnés

- Notation : $\langle a, b\rangle, \langle 1, 2, 3\rangle$ – attention : en mathémathiques on utilise souvent des parenthèses régulières ('$(\ldots,\ldots)$') pour signifier les ensembles ordonnés ; comme les parenthèses sont déjà dans l'alphabet de L_1, nous utilisons à la place les chevrons "$\langle$" et "$\rangle$"
- Un ensemble ordonné est un type d'ensemble qui est sensible à l'ordre de ses éléments : $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$, $\langle a, b, c\rangle \neq \langle a, c, b\rangle \neq \langle b, a, c\rangle \neq \langle b, c, a\rangle \neq \langle c, a, b\rangle \neq \langle c, b, a\rangle, \ldots$
- Un ensemble ordonné de deux éléments est appelé *couple*
- Deux couples $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$ sont identiques si et seulement si $a = c$ et $b = d$

Théorie des ensembles

Ensembles ordonnés

- Les ensembles ordonnés peuvent être définis en termes d'ensembles "ordinaires"
- Une version d'une telle définition est la suivante :

$$\langle a, b \rangle =_{def} \{a, \{a, b\}\}$$
$$\langle a, b, c \rangle =_{def} \{a, \{b, \{b, c\}\}\}$$
$$\langle a, b, c, d \rangle =_{def} \{a, \{b, \{c, \{c, d\}\}\}\}$$
$$\ldots$$

- La définition nous donne une directive permettant d'associer systématiquement des ensembles différents à des ensembles ordonnés qui contiennent les mêmes éléments dans des ordres différents

Théorie des ensembles

Ensembles ordonnés

- Il existe des alternatives à la définition introduite auparavant, p. ex. la définition de Kuratowski :

$$\langle a, b\rangle =_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\langle a, b, c\rangle =_{def} \{\{a\}, \{\{a\}, \{b, \{b, c\}\}\}\}$$

$$\langle a, b, c, d\rangle =_{def} \{\{a\}, \{\{a\}, \{\{b\}, \{\{c\}, \{c, d\}\}\}\}\}$$

$$\ldots$$

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats unaires, constantes et ensembles

- La première idée fondamentale de la sémantique de L_1 est qu'on peut utiliser la théorie des ensembles pour modéliser la signification des prédicats
- Par conséquent, la sémantique de L_1 identifie la signification d'un prédicat unaire (d'arité 1) avec *l'ensemble de tous les objets qui ont la propriété qui correspond à ce prédicat*
- Dans cette modélisation de la signification, la relation d'appartenance "$\in$" correspond à la relation "...est parmi les objets qui ont la propriété ..."

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats unaires, constantes et ensembles

Exemples

- prédicat P (“est une ville”) – signification : l’ensemble qui contient (supposons) seulement Aix-la-Chapelle et Toronto – si “a” signifie Aix-la-Chapelle et “$\mathbf{P}$” l’ensemble des villes, la proposition du langage de la théorie des ensembles “$a \in \mathbf{P}$” nous dit, selon notre modélisation, que Aix-la-Chapelle est parmi les (objets qui sont des) villes
- prédicat Q (“a un frère”) – signification : l’ensemble qui contient (supposons) seulement Jacob Ludwig Carl Grimm et Maggie Gyllenhaal – si “b” signifie Jacob Ludwig Carl Grimm et “$\mathbf{Q}$” l’ensemble des objets qui ont un frère, “$b \in \mathbf{Q}$” nous dit que J. L. C. Grimm est parmi les objets qui ont des frères

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats unaires – vérité d'une prédication et appartenance d'un objet à un ensemble

- Une deuxième idée fondamentale de cette sémantique est que la vérité de toute formule atomique de L_1 peut être définie en termes de la théorie des ensembles
- Rappel : les constantes $a, b, c, \ldots$ signifient des objets, p. ex.
  - constante a – signification : Aix-la-Chapelle
  - constante b – signification : Jacob Ludwig Carl Grimm

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats unaires – vérité d'une prédication et appartenance d'un objet à un ensemble

Sémantique préliminaire pour prédicats unaires

- Nous avons maintenant tous les dispositifs nécessaires pour expliquer l'idée de la sémantique de L_1 pour les formules atomiques qui contiennent des prédicats unaires
- Pour ce faire, nous allons introduire une "proto-sémantique", une version préliminaire et officieuse de la clause sémantique pour les formules atomiques de L_1

Définition préliminaire : vérité en L_1 pour prédications unaires Une formule atomique de la forme $P_i^1 c_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ est vraie si et seulement si l'objet qui correspond à c_j est un élément de l'ensemble qui correspond au prédicat P_i^1.

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats unaires – vérité d'une prédication et appartenance d'un objet à un ensemble

Application de la sémantique préliminaire

- Nous pouvons maintenant utiliser cette définition préliminaire pour évaluer la vérité des toutes les formules du fragment interprété de L_1 introduit précédemment :
  - Formule atomique : *Pa* – traduction en langage de la théorie des ensembles : Aix-la-Chapelle $\in$ {Aix-la-Chapelle, Toronto} – valeur de vérité de la formule : VRAI
  - *Pb* – J. L. C Grimm $\in$ {Aix-la-Chapelle, Toronto} – FAUX
  - *Qa* – Aix-la-Chapelle $\in$ {J. L. C. Grimm, M. Gyllenhaal} – FAUX
  - *Qb* – J. L. C Grimm $\in$ {J. L. C. Grimm, M. Gyllenhaal} – VRAI

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats *n*-aires et ensembles

- Comment modéliser la signification des relations de la même façon ?
- Prenons p. ex. la relation "est à l'est de"
- On ne peut pas simplement assigner comme signification à cette relation l'ensemble {Berne,Neuchâtel}, car l'ensemble, mais pas le prédicat, est insensible à l'ordre de ses arguments (p. ex. Berne est à l'est de Neuchâtel, mais Neuchâtel n'est pas à l'est de Berne)

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats n-aires et ensembles

- A la place, peut-on assigner le couple $\langle$Berne,Neuchâtel$\rangle$ comme signification ?
- Non, car l'idée de notre sémantique est que la signification d'un prédicat peut être identifiée avec l'ensemble qui contient tous les objets pertinents
- Évidemment, Berne et Neuchâtel ne sont pas les seuls objets dont le premier est à l'est du deuxième
- La solution de ce problème : on considère *l'ensemble de tous les ensembles ordonnés de n-éléments* qui sont correctement décrit par un prédicat n-aire comme sa signification

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Prédicats *n*-aires et ensembles

Exemples

- prédicat binaire S ("...est à l'est de...") – signification : l'ensemble de tous les couples dont le premier élément est à l'est du deuxième :

$$\{\langle \textit{Berne}, \textit{Neuchâtel}\rangle, \langle \textit{La Place Rouge}, \textit{La Tour Eiffel}\rangle, \ldots\}$$

- prédicat binaire T ('...est un nombre naturel inférieur à...') : l'ensemble de tous les nombres naturels dont le premier est inférieur au deuxième :

$$\{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots\}$$

- prédicat ternaire U ("...est entre ...et ...") – signification : l'ensemble de tous les ensembles ordonnés d'arité 3 qui sont tels que le premier élément est entre le deuxième et le troisième :

$$\{\langle \textit{la gare}, \textit{le lac}, \textit{le Jura}\rangle, \langle \text{Jean}, \text{Jeanne}, \text{Jacques}\rangle, \ldots\}$$

Remarques préliminaires sur la sémantique de L_1

Sémantique préliminaire pour prédicats n-aires

Sémantique préliminaire

Définition préliminaire : vérité en L_1 pour prédications n-aires Une formule atomique de la forme $P_i^n c_j \dots c_k$ $(i, j, k \in \mathbb{N})$ est vraie si et seulement si l'ensemble ordonné $\langle c_j, \dots, c_k \rangle$ est un élément de l'ensemble des ensembles ordonnés qui correspond au prédicat P_i^n.

Application de la sémantique préliminaire

- Nous traitons l'exemple du prédicat S défini précédemment
- constante c – signification : Berne
- constante d – signification : Neuchâtel
  - Scd – $\langle Berne, Neuchâtel \rangle \in \{\langle Berne, Neuchâtel \rangle, \dots\}$ – VRAI
  - Sdc – $\langle Neuchâtel, Berne \rangle \in \{\langle Berne, Neuchâtel \rangle, \dots\}$ – FAUX

Propriétés formelles des relations binaires

- La théorie des ensembles nous sert de fondement pour la sémantique de L_1
- Mais elle nous permet aussi de caractériser quelques propriétés formelles des relations binaires qui jouent des rôles importants en logique et en analyse des concepts et des arguments

Propriétés formelles des relations binaires

Définitions et exemples

Définition : réflexivité Une relation binaire R est réflexive si et seulement si pour tout x, Rxx.

Exemple – *identité* : chaque objet x est identique à x

Définition : symétrie Une relation binaire R est symétrique si et seulement si pour tout x et pour tout y, si Rxy, alors Ryx.

Exemple – *danser ensemble* : Si Alex et Claude dansent ensemble, Claude et Alex dansent ensemble

Définition : asymétrie Une relation binaire R est asymétrique si et seulement s'il n'y a aucun x et aucun y tel que si Rxy, alors Ryx.

Exemple – *battre* : Si Liverpool bat Atlético, Atlético ne bat pas Liverpool

Propriétés formelles des relations binaires

Définitions et exemples

Définition : antisymétrie Une relation binaire R est antisymétrique si et seulement si pour tout x et pour tout y, si Rxy et Ryx, alors $x = y$.

Exemple – $\subseteq$, la relation d'être sous-ensemble : Si $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$ et $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S}$, $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ (si tous les éléments de $\mathbf{S}$ sont des éléments de $\mathbf{T}$ et tous les éléments de $\mathbf{T}$ sont des éléments de $\mathbf{S}$, les deux ensembles ont les mêmes éléments et sont donc identiques)

Définition : transitivité Une relation R est transitive si et seulement si pour tout x et pour tout y et pour tout z, si Rxy et Ryz, Rxz.

Exemple – *être plus âgé que* : Si Astérix est plus âgé qu'Obélix et Obélix est plus âgé qu'Idéfix, alors Astérix est plus âgé qu'Idéfix.

Propriétés formelles des relations binaires

Définitions et exemples

Définition : relation d'équivalence Une relation binaire est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple – "...être né(e) le même jour que..." :

- Philémon est né le même jour que Philémon (réflexivité)
- Si Félicien est né le même jour que Monsieur Barthélémy, Monsieur Barthélémy est né le même jour que Félicien (symétrie)
- Si Philémon est né le même jour que Anatole et Anatole est né le même jour que Vendredi, Philémon est né le même jour que Vendredi (transitivité)

Propriétés formelles des relations binaires

Définitions et exemples

Définition : fonction Une relation binaire R est une fonction si et seulement si, pour tout x, pour tout y et pour tout z, si Rxy et Rxz, $y = z$.

Exemple – la *conjonction* est une (véri-)fonction car, pour chaque couple des valeurs de vérité, elle nous donne une seule et unique valeur de vérité

Propriétés formelles des relations binaires

Quatre exemples des applications en logique et en philosophie

1. Un exemple en logique : La transitivité de la relation $\vdash_{\mathsf{L}_0}$ nous permet de constater que $A \vdash_{\mathsf{L}_0} C$, si nous avons déjà montré que $A \vdash_{\mathsf{L}_0} B$ et que $B \vdash_{\mathsf{L}_0} C$
2. Un exemple en théorie des ensembles : pour éviter le paradoxe de Russell, la théorie axiomatique des ensembles traite de fait la relation "$\in$" comme une relation irréflexive (pour chaque ensemble x, $x \notin x$), p. ex. grâce à l'inclusion de l'axiome de fondation, afin d'empêcher la construction de l'ensemble paradoxal **E**
3. Un autre ensemble en théorie des ensembles : $\subseteq$, mais pas $\in$ est transitive – pour tout x, pour tout y, et pour tout z, si $x \subseteq y$ et $y \subseteq z$, alors $x \subseteq z$, mais p. ex. même si $Jeanne \in \{Jeanne\}$ et $\{Jeanne\} \in \{\{Jeanne\}, Jacques\}$, il n'est pas le cas que $Jeanne \in \{\{Jeanne\}, Jacques\}$

Propriétés formelles des relations binaires

Trois exemples des applications en logique et en philosophie

3. Un exemple en métaphysique :
   - Intuitivement, **i)** Jean à cinq ans est la même personne que Jean à six ans, Jean à six ans est la même personne que Jean à sept ans, . . . et Jean à soixante-cinq ans est la même personne que Jean à soixante-six ans ; mais comme Jean a beaucoup changé durant sa vie, **ii)** Jean à cinq ans n'est pas la même personne que Jean à soixante-six ans
   - Par conséquent, il semble que la relation "est la même personne que" ne peut pas être la relation d'identité numérique, car cette relation est transitive et nous force à accepter ii) si nous acceptons i)
   - Quelques philosophes, comme p. ex. David Lewis, ont proposé une théorie de l'identité personnelle qui se base sur une relation de similarité générale entre parties temporelles des personnes ; comme toutes les relations de similarité générale, cette relation n'est pas transitive et nous permet d'accepter i) tout en rejetant ii)