Introduction à la logique des propositions VI

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre d'automne 2019 – 9 décembre 2019

Récapitulatif

Logique et philosophie

La philosophie s'occupe de questions comme :

- Qu'est-ce que la relation entre le corps et l'esprit ?
- Existe-t-il une réalité extérieure indépendante de notre esprit ?
- Le libre arbitre existe-t-il ?
- Un ordinateur peut-il penser ?
- Qu'est-ce que la connaissance ?
- Qu'est que la signification des noms propres ?
- Qu'est-ce qui justifie nos jugements de valeur (éthiques ou esthétiques) ?
- ...

Récapitulatif

Logique et philosophie

La logique s'occupe de ses propres questions, comme par exemple :

- Qu'est-ce que la conséquence logique ?
- Qu'est-ce qu'une preuve ?
- Quelles méthodes de preuve y a-t-il ?
- Quels phénomènes peut-on modéliser en logique ?
- Quelles sont les propriétés formelles des logiques ?
- ...

Récapitulatif

Logique et philosophie

Mais la logique a aussi une grande importance méthodologique pour la philosophie :

- Les philosophes s'intéressent à la nature et aux normes de raisonnement et la logique nous donne une théorie systématique d'un type de raisonnement important, le raisonnement déductif
- L'une des activités les plus importantes des philosophes est la construction et la critique d'arguments, dont la logique nous donne un standard de qualité important, la validité – les arguments invalides sont des sophismes, des arguments qui contiennent des raisonnements erronés, ou tout du moins non concluants
- La logique (notamment la logique des prédicats et la logique modale) permet aux philosophes de modéliser des concepts qui les intéressent (p. ex. la nécessité, le nombre) et des relations inférentielles entre eux

Récapitulatif

Langage naturel, formalisation, langage formel

- Les méthodes formelles logiques ne peuvent être appliquées qu'aux langages formels qui sont parfaitement précis et ne contiennent aucune ambiguïté
- Le langage introduit dans ce cours, le langage de la logique des propositions, est un langage de ce type
- Par conséquent, pour évaluer des arguments à l'aide des méthodes formelles, il faut les formaliser, soit les traduire du langage naturel en langage formel

Récapitulatif

Langage naturel, formalisation, langage formel

Comment formaliser une phrase du français ?

1. Identifier tous les mots qui signifient des connecteurs logiques, p. ex.
   - "ne ... pas", "pas" ⇒ négation ("$\neg$")
   - "et", "mais" ⇒ conjonction ("$\wedge$")
   - "ou" ⇒ disjonction ("$\vee$")
   - "si. . . , . . . ", "seulement si" ⇒ conditionnel matériel ("$\rightarrow$")
   - "si et seulement si" ⇒ biconditionnel matériel ("$\leftrightarrow$")
2. Identifier les parties (qui sont aussi des phrases simples) de la phrase connectées par ces mots mais qui ne contiennent pas ces mots, p. ex.
   - Ed aime son hamster et Bernard n'est pas le président du club de physique.
   - Si Docteur Fred n'est pas chauve, le mari d'Edna Edison est ou n'est pas chauve.

Récapitulatif

Langage naturel, formalisation, langage formel

Comment formaliser une phrase du français ?

3. Assigner une variable propositionnelle différente à chaque partie simple de la phrase qui exprime une proposition différente
   - "Ed aime son hamster." ⇒ "p"
   - "Bernard est le président du club de physique." ⇒ "q"

   et assigner la même variable propositionelle à chaque partie qui exprime la même proposition
   - "Le mari d'Edna Edison est chauve." ⇒ "r"
   - "Docteur Fred est chauve." ⇒ "r"

   (parce que Docteur Fred est le mari d'Edna Edison)

Récapitulatif

Langage naturel, formalisation, langage formel

Comment formaliser une phrase du français ?

4. La formalisation de la phrase est une formule de L_0, qui consiste en ces connecteurs logiques et variables propositionnelles, et dont la forme logique reflète la signification de la phrase
   - Ed aime son hamster et Bernard n'est pas le président du club de physique. $\Rightarrow$ $p \wedge \neg q$
   - Si Docteur Fred n'est pas chauve, le mari d'Edna Edison est ou n'est pas chauve. $\Rightarrow$ $\neg r \rightarrow (r \vee \neg r)$

Récapitulatif

Langage naturel, formalisation, langage formel

Comment formaliser un argument ?

- Pour formaliser un argument en L_0, il faut identifier ses prémisses et sa conclusion, puis les formaliser, p. ex. :
  - "Ed n'a pas retrouvé son hamster. S'il l'avait retrouvé, il aurait été heureux, mais Ed n'était pas heureux."
    1. $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$
    2. $\therefore \neg p$
- Ensuite, on peut utiliser l'une des méthodes formelles pour *vérifier la validité* de la version formalisée de l'argument (on vérifie que la formalisation de la conclusion *est une conséquence logique* (méthode sémantique)/*peut être déduite* (méthode syntaxique) des formalisations des prémisses)

Récapitulatif

Les méthodes sémantiques

- Les méthodes sémantiques nous permettent de construire des preuves qui se basent sur les significations (les conditions de vérité) des formules de L_0

Les tables de vérité

- Chaque distribution de valeurs de vérité sur les formules atomiques détermine la valeur de vérité de chaque formule complexe qui se compose de ces formules atomiques et des connecteurs logiques (vérifonctionnalité des connecteurs logiques)
- Une table de vérité représente les valeurs de vérité d'une formule relativement à chaque distribution possible des valeurs de vérité sur les formules atomiques

Récapitulatif

Les méthodes sémantiques

Des applications typiques de la méthode des tables de vérité :

- Montrer qu'une formule A est une tautologie ($\vDash_{L_0} A$) – on construit une table de vérité qui montre que A est vraie, peu importe comment les valeurs de vérité sont distribuées sur les formules atomiques contenues dans A
- Montrer qu'une formule A est une contradiction ($\vDash_{L_0} \neg A$) – on construit une table de vérité qui montre que A est fausse, peu importe comment les valeurs de vérité sont distribuées sur les formules atomiques contenues dans A

Récapitulatif

Les méthodes sémantiques

Des applications typiques de la méthode des tables de vérité :

- Montrer que deux formules A et B sont équivalentes ($A \vDash_{L_0} B$ et $B \vDash_{L_0} A$) – on construit une table de vérité qui montre que A et B ont les mêmes valeurs de vérité relativement à n'importe quelle distribution de valeurs de vérité sur les formules atomiques contenues dans A et B
- Montrer qu'une formule C est une conséquence logique des formules $A, B, \ldots$ ($(A \wedge (B \wedge \ldots)) \vDash_{L_0} C$) – on construit une table de vérité qui montre que le conditionnel matériel "$(A \wedge (B \wedge \ldots)) \rightarrow C$" est une tautologie ($\vDash_{L_0} (A \wedge (B \wedge \ldots)) \rightarrow C$)

Récapitulatif

Les méthodes syntaxiques

- Les méthodes syntaxiques sont des méthodes qui se basent sur des règles d'inférence syntaxiques liées à la forme syntaxique des formules de L_0

La déduction naturelle

- La déduction naturelle nous permet de construire des preuves qui suivent l'ordre naturel du raisonnement logique
- Les preuves en déduction naturelle sont construites sur la base des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs logiques (plus la règle de répétition) qui sont appliquées aux hypothèses acceptées pour la preuve (s'il y en a)

Récapitulatif

Les méthodes syntaxiques

Des applications typiques de la déduction naturelle :

- Montrer qu'une formule est prouvable ($\vdash_{L_0} A$) – on construit une preuve de A sans hypothèses
- Montrer qu'une formule est inconsistante ($\vdash_{L_0} \neg A$) – on construit une preuve de $\neg A$ sans hypothèses
- Montrer qu'une formule peut être déduite d'un ensemble de formules ($A, B, \ldots \vdash_{L_0} C$) – on construit une preuve de C sur la base des hypothèses $A, B, \ldots$

Récapitulatif

Les méthodes syntaxiques

La méthode des arbres

- La méthode des arbres nous permet de déterminer si un ensemble de formules est consistant ou inconsistant

Des applications typiques de la méthode des arbres :

- Montrer qu'une formule est prouvable ($\vdash_{L_0} A$) – on construit un arbre dont la racine contient uniquement $\neg A$ et dont toutes les branches se terminent
- Montrer qu'une formule est inconsistante ($\vdash_{L_0} \neg A$) – on construit un arbre dont la racine contient uniquement A et dont toutes les branches se terminent
- Montrer qu'une formule peut être déduite d'un ensemble de formules ($A, B, \ldots \vdash_{L_0} C$) – on construit un arbre dont la racine contient $A, B, \ldots$ et $\neg C$ dont toutes les branches se terminent

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

- La distinction entre méthodes syntaxiques et méthodes sémantiques est reflétée par une distinction parmi les concepts logiques associés
  - Concepts syntaxiques : prouvabilité, déduction, exprimés par le symbole "$\vdash_{L_0}$"
  - Concepts sémantiques : tautologie/vérité logique, conséquence logique, exprimés par le symbole "$\models_{L_0}$"
- Une question importante : Peut-on prouver les mêmes résultats au moyen des méthodes syntaxiques et des méthodes sémantiques ?

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

- Si on peut p. ex. montrer que $A, B \vDash_{L_0} C$ avec une table de vérité, peut-on aussi construire une preuve en déduction naturelle (ou un arbre) qui montre que $A, B \vdash_{L_0} C$ et vice-versa ?
- Pour notre logique L_0 et nos trois méthodes formelles, la réponse est oui !
- La logique des propositions est *complète*, *correcte*, et *adéquate*

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

Complétude Pour tout ensemble de formules Δ et pour toute formule A, si $\Delta \vDash_{L_0} A$, alors $\Delta \vdash_{L_0} A$

- Complétude nous dit que pour chaque formule A, si A est une conséquence logique (concept sémantique !) des formules en Δ, alors on peut construire une preuve (concept syntaxique !) de A avec les formules en Δ comme hypothèses

Correction Pour tout ensemble de formules Δ et pour toute formule A, si $\Delta \vdash_{L_0} A$, alors $\Delta \vDash_{L_0} A$

- Correction nous dit que pour chaque formule A, si on peut construire une preuve (concept syntaxique !) de A avec les formules en Δ comme hypothèses, alors A est une conséquence logique (concept sémantique !) des formules en Δ

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

- Comme la logique des propositions est complète et correcte, elle est aussi adéquate :

Adéquation Pour tout ensemble de formules Δ et pour toute formule A, $\Delta \models_{L_0} A$ si et seulement si $\Delta \vdash_{L_0} A$

- Comme l'ensemble des formules Δ peut être vide, Adéquation implique :

Adéquation* Pour toute formule A, $\models_{L_0} A$ si et seulement si $\vdash_{L_0} A$

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

- Ces théorèmes nous donnent une réponse à notre question : si je peux prouver A, p. ex. en déduction naturelle, il est toujours possible de construire une table de vérité qui montre que A est une tautologie et vice versa
- Ils montrent que dans la logique de L_0, les concepts de vérité logique et de prouvabilité coïncident, dans le sens que chaque vérité logique est prouvable (Complétude) et que chaque formule qui est prouvable est une vérité logique (Correction) (et il en va de même pour les concepts de déduction et de conséquence logique)
- L'Adéquation assure p. ex. qu'on ne peut pas prouver, avec nos méthodes syntaxiques, des faussetés logiques, et aussi que toutes les vérités logiques peuvent être prouvées par ces méthodes

La relation entre méthodes et concepts syntaxiques et méthodes et concepts sémantiques

- Notez que, selon les résultats de l'Adéquation, les principes concernant la relation syntaxique de déduction ($\vdash_{L_0}$) dont nous avons discuté (p. ex. monotonicité, ou le fait qu'une formule qui est prouvable en L_0 peut être déduite de chaque ensemble de formules) sont aussi valides pour la relation sémantique de conséquence logique ($\vDash_{L_0}$) et vice-versa
- Il y a d'autres propriétés que les deux relations ont en commun, p. ex.
  - Réflexivité – Pour chaque formule A :
    - $A \vdash_{L_0} A$
    - $A \vDash_{L_0} A$
  - Transitivité – Pour chaque A, B, C :
    - Si $A \vdash_{L_0} B$ et $B \vdash_{L_0} C$, alors $A \vdash_{L_0} C$
    - Si $A \vDash_{L_0} B$ et $B \vDash_{L_0} C$, alors $A \vDash_{L_0} C$