Introduction à la logique des propositions IV

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre d'automne 2019 – 11 novembre 2019

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

La méthode des tables de vérité est une méthode sémantique

- Si on p. ex. construit une table de vérité pour prouver que la formule "$p \vee \neg p$" est une vérité logique, cette preuve se base sur les significations (soit les conditions de vérité) des connecteurs logiques "$\neg$" et "$\vee$" – la table de vérité montre que toute formule de cette forme logique doit être vraie
- En général, on distingue entre des méthodes formelles sémantiques et syntaxiques
- Les *méthodes formelles sémantiques*, comme la méthode des tables de vérité, produisent des *preuves sémantiques*
- Elles se basent sur les significations des formules pertinentes
- La méthode des tables de vérité est la seule méthode formelle sémantique que nous discuterons dans ce cours
- Une alternative sera présentée dans le cours sur la logique des prédicats qui suit au prochain semestre

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

Méthodes syntaxiques

- Il existe aussi des méthodes formelles syntaxiques qui produisent des preuves syntaxiques
- Ces méthodes se basent sur des règles de déduction pour établir qu'une formule peut être, ou ne peut pas être, dérivée des formules qui sont acceptées comme suppositions (p. ex. parce qu'ils sont les prémisses d'un argument)
- Ces règles de déduction sont des règles purement syntaxiques : elles nous permettent de passer d'une formule ou d'une séquence de formules à une autre formule ou séquence de formules sans prendre en considération leurs significations
- Dans un certain sens, on peut donc dire que les méthodes syntaxiques sont des méthodes pour la manipulation des séquences de symboles

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

Méthodes syntaxiques

- Parmi les méthodes formelles syntaxiques on trouve par exemple :
  - la méthode axiomatique
  - la déduction naturelle
  - la méthode des arbres
- Dans ce cours, nous discuterons deux de ces méthodes, la déduction naturelle et la méthode des arbres
- La méthode axiomatique ne sera pas abordée car les deux autres sont plus faciles à appliquer en pratique
- Nous commencerons par la déduction naturelle

Méthodes syntaxiques

Le concept de déduction

- Les méthodes formelles syntaxiques produisent des *preuves syntaxiques* dont les résultats peuvent être exprimés par le concept syntaxique de prouvabilité qui est symbolisé par "$\vdash$"
- Il y a une correspondance directe entre ce concept et le concept sémantique de conséquence logique qui est symbolisé par "$\vDash$", mais les deux concepts ne sont pas identiques – la connexion entre les deux concepts sera discutée brièvement dans le dernier cours
- "$A, B, \ldots \vdash_{L_0} C$" dit que la formule C de L_0 *peut être déduite* ou *peut être prouvée* de l'ensemble des formules $A, B, \ldots$ de L_0

Méthodes syntaxiques

Les concepts de prouvabilité et consistance

- Si on peut déduire une formule A de l'ensemble vide des formules de L_0, on dit que A est *prouvable* en L_0 ; en symboles : $\vdash_{L_0} A$
- Pour exprimer qu'une formule ne peut pas être déduite des formules de L_0 ou n'est pas prouvable en L_0, on utilise le symbole "$\nvdash_{L_0}$"
- Une formule A est *consistante* en L_0 si et seulement si $\nvdash_{L_0} \neg A$ (si sa négation n'est pas prouvable en L_0) et A est *inconsistante* en L_0 si et seulement si $\vdash_{L_0} \neg A$ (si sa négation est prouvable en L_0)

La méthode de la déduction naturelle

- Le concept de prouvabilité est intrinsèquement lié au concept syntaxique de preuve
- Qu'est-ce qu'une preuve d'un point de vue syntaxique ? – Ça dépend de la méthode formelle syntaxique
- La déduction naturelle est inspirée par notre façon naturelle de raisonner avec des notions logiques
- Son idée fondamentale est qu'une preuve est le résultat d'applications des règles d'inférence

La méthode de la déduction naturelle

Les preuves en déduction naturelle

- Une *preuve en déduction naturelle* est une séquence de lignes numérotées qui contiennent des formules de L_0 dont :
  - la dernière ligne contient toujours la formule qui est prouvée
  - les premières lignes contiennent les hypothèses de la preuve, s'il y en a
  - chaque ligne qui ne contient pas une hypothèses de la preuve est le résultat de l'application d'une règle d'inférence syntaxique
- Chaque connecteur logique est associé à deux sortes de règles d'inférence : une *règle d'élimination* et une *règle d'introduction*

La méthode de la déduction naturelle

Règles d'élimination et d'introduction

- La *règle d'élimination* d'un connecteur logique spécifie les conditions sous lesquelles nous pouvons ajouter, à une preuve qui a dans une ligne une formule qui contient ce connecteur comme connecteur logique principal, une formule qui ne contient pas le connecteur dans une nouvelle ligne
- La *règle d'introduction* d'un connecteur logique spécifie les conditions sous lesquelles nous pouvons ajouter à une preuve une nouvelle ligne qui contient une formule dans laquelle le connecteur est le connecteur logique principal
- Donc, pour construire une preuve en déduction naturelle, on utilise ces deux types de règles (plus la règle de répétition qui n'est pas liée à un connecteur logique) pour finalement arriver à une ligne de la preuve qui contient la formule que nous voulons déduire

La méthode de la déduction naturelle

- Notez que les règles d'inférence sont des règles purement syntaxique :
- Elles nous permettent de passer d'une ou plusieurs formules à une nouvelle formule

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – la notation

- Il existe différentes notations pour les preuves en déduction naturelle ; notre notation ("à la Fitch") est utilisée dans Lepage, François : Éléments de logique contemporaine. Les Presses de l'université de Montréal, 1991, ch. V ; une notation alternative ("à la Gentzen") est par exemple utilisée dans Halbach, Volker : The Logic Manual. Oxford University Press, 2010)
- Voilà un exemple schématique d'une preuve en déduction naturelle (à la Fitch) :

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – la notation

1	A_1	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
n	A_n	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
o	C	$\mathcal{I}(n+1), \ldots$

- Une preuve de cette forme montre que $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_{L_0} C$, ou pour simplifier, que $A_1, \ldots, A_n \vdash_{L_0} C$ – que C peut être déduit des hypothèses $A_1, \ldots, A_n$
- $A_1, \ldots, A_n$ est une liste qui contient un nombre n de formules

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – la notation

1	A_1	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
n	A_n	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
o	C	$\mathcal{I}(n+1), \ldots$

- La barre verticale sert à indiquer la longueur de la preuve, elle se termine toujours après la formule qui est prouvée
- La colonne à gauche de cette barre contient les numéros de lignes – ces numéros servent de référence pour l'application des règles d'inférence

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – la notation

1	A_1	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
n	A_n	Hypothèse
$\vdots$	$\vdots$	
o	C	$\mathcal{I}(n+1), \ldots$

- Dans les preuves schématiques, on y utilise des variables $n, o, p, \ldots$ (à ne pas confondre avec des variables propositionelles) ; dans les preuves non-schématiques, on utilise toujours des nombres de ligne consécutifs
- La barre horizontale marque la fin des hypothèses – elle disjoint les hypothèses et les lignes qui contiennent des formules qui sont le résultat de l'application des règles d'inférence

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – la notation

$$
\begin{array}{c|ll}
1 & A_1 & \text{Hypothèse} \\
\vdots & \vdots & \\
\text{n} & A_n & \text{Hypothèse} \\
\cline{2-2}
\vdots & \vdots & \\
\text{o} & C & \mathcal{I}(n+1), \ldots
\end{array}
$$

- "$\vdots$" indique une partie de la preuve qui est omise dans le schéma
- À la droite d'une formule on note comment on est arrivé à ajouter la ligne qui la contient – soit on spécifie que la formule contient une hypothèse, soit on spécifie la ou les règles d'inférence utilisées – dans ce schéma, on a noté dans la ligne *o* que la règle $\mathcal{I}$ était appliquée, virtuellement, à la ligne *n* pour écrire C dans *o*

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – les sous-preuves

- Une preuve peut contenir des sous-preuves ; chaque sous-preuve est marquée par son propre trait vertical qui indique sa longueur et par son propre trait horizontal qui indique ses hypothèses, p. ex. :

$$
\begin{array}{c|ll}
1 & A_1 & \text{Hypothèse} \\
\vdots & \vdots & \\
n & A_n & \text{Hypothèse} \\ \cline{2-2}
\vdots & \vdots & \\
o & \quad\vert\; B & \text{Hypothèse} \\ \cline{2-2}
\vdots & \quad\vert\; \vdots & \\
p & \quad\vert\; C & \mathcal{I}(o, o+x) \\
\vdots & \vdots & \\
q & D & \qquad \mathcal{I}(n, p)
\end{array}
$$

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – les sous-preuves

- Pour distinguer entre preuve et sous-preuve, on appelle la preuve qui n'est pas une sous-preuve la *preuve principale*
- Comme la preuve principale, une sous-preuve doit se terminer par une formule qui est prouvée dans la sous-preuve et chaque sous-preuve doit se terminer avant la fin de la preuve principale
- Une sous-preuve peut aussi contenir des sous-preuves (des sous-sous-preuves)

La méthode de la déduction naturelle

Preuves en déduction naturelle – les sous-preuves

- L'introduction d'une sous-preuve est toujours régie par une règle d'inférence
- La règle d'inférence spécifie explicitement :
  1. la forme de la sous-preuve – par quelle hypothèse elle commence et par quelle formule la sous-preuve se termine et
  2. quelle formule on peut ajouter à la preuve principale (ou à la sous-preuve dans laquelle se trouve la sous-preuve) après avoir complété la sous-preuve
- Notez qu'une formule qui est déduite des sous-hypothèses (les hypothèses d'une sous-preuve) dans une sous-preuve n'est pas prouvée dans la preuve principale
- Notez aussi qu'une sous-hypothèse est acceptée seulement pour prouver la formule qui doit être prouvée dans la sous-preuve ; elle n'est pas une hypothèse additionnelle de la preuve principale

La méthode de la déduction naturelle

Les règles

- Notez bien que toutes les règles s'appliquent tant à des formules atomiques qu'à des formules complexes, comme indiqué par l'utilisation des métavariables

La méthode de la déduction naturelle

Les règles : répétition

R – Répétition

- La première règle nous permet de répéter une hypothèse ou une formule qui a déjà été prouvée dans une nouvelle ligne de la preuve :

$$\begin{array}{r|ll} \text{n} & A & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{m} & A & \text{R(n)} \end{array}$$

- Dans cette schéma, la règle R a été appliquée à la ligne n (qui peut contenir soit une hypothèse, soit une formule qui est déjà prouvée), comme noté à droite dans la ligne m

La méthode de la déduction naturelle

Les règles : répétition

Exemple

À prouver : $p \vdash_{L_0} p$

1	p	Hypothèse
2	p	R(1)

- Notez qu'une formule qui est la répétition d'une hypothèse est prouvée par cette hypothèse – on peut toujours déduire une hypothèse d'elle-même :

La méthode de la déduction naturelle

Les règles : répétition

La règle de répétition et les sous-preuves

- L'application de la règle R est limité aux lignes du même niveua ou d'un niveau plus bas de la hiérarchie des sous-preuves dans une preuve
- On peut toujours répéter, dans la preuve principale ou dans une de ses sous-preuves (et sous-sous-preuves . . .) une formule qui est soit une hypothèse, soit prouvée dans la preuve principale
- Mais on ne peut pas répéter une hypothèse d'une sous-preuve ou une formule qui a été prouvée dans une sous-preuve dans (p. ex.) la preuve principale – les sous-hypothèses ne sont pas des hypothèses de la preuve principale et les formules prouvées dans une sous-preuve ne sont pas prouvées dans la preuve principale

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conjonction

$\wedge$-I – règle d'introduction de la conjonction

- Cette règle nous permet d'écrire sur une nouvelle ligne une conjonction de deux formules qu'on a déjà écrites dans deux lignes précédentes de la preuve :

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conjonction

$\wedge$-I – règle d'introduction de la conjonction

n	A	
$\vdots$	$\vdots$	
o	B	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$A \wedge B$	$\wedge$-I(n,o)

Ou bien :

n	B	
$\vdots$	$\vdots$	
o	A	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$A \wedge B$	$\wedge$-I(n,o)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conjonction

Exemple

À prouver : $p, q \vdash_{L_0} p \wedge q$

1	p	Hypothèse
2	q	Hypothèse
3	$p \wedge q$	$\wedge$-I(1,2)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conjonction

∧-E – règle d'élimination de la conjonction

- Cette règle nous permet d'écrire sur une nouvelle ligne une des deux sous-formules d'une conjonction qui a déjà été écrite dans une ligne précédente de la preuve :

$$\begin{array}{c|ll} \text{n} & A \wedge B & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{o} & A & \wedge\text{-E(n)} \end{array}$$

Ou bien :

$$\begin{array}{c|ll} \text{n} & A \wedge B & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{o} & B & \wedge\text{-E(n)} \end{array}$$

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conjonction

Exemple

À prouver : $(p \wedge q) \wedge r \vdash_{L_0} p \wedge (q \wedge r)$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	Hypothèse
2	$(p \wedge q)$	$\wedge$-E(1)
3	q	$\wedge$-E(2)
4	r	$\wedge$-E(1)
5	$(q \wedge r)$	$\wedge$-I(3,4)
6	p	$\wedge$-E(2)
7	$p \wedge (q \wedge r)$	$\wedge$-I(5,6)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conditionnel matériel

$\rightarrow$-E – règle d'élimination du conditionnel matériel

- Cette règle correspond à la forme d'argument *modus ponens* que nous avons déjà rencontrée
- Elle nous permet d'écrire la formule "B" dans une nouvelle ligne de la preuve, si la preuve contient déjà une ligne avec la formule "$A \rightarrow B$" et une autre ligne avec la formule "A"

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conditionnel matériel

$\rightarrow$-E – règle d'élimination du conditionnel matériel

n	A	
⋮	⋮	
o	$A \rightarrow B$	
⋮	⋮	
p	B	$\rightarrow$-E(n,o)

Ou bien :

n	$A \rightarrow B$	
⋮	⋮	
o	A	
⋮	⋮	
p	B	$\rightarrow$-E(n,o)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conditionnel matériel

$\rightarrow$-I – règle d'introduction du conditionnel matériel

- Pour pouvoir ajouter à une preuve une ligne qui contient la formule "$A \rightarrow B$", il faut construire une *sous-preuve* qui montre qu'on peut déduire "B" de l'hypothèse "A"
- La forme schématique de la règle est :

n	$\quad A$	
$\vdots$	$\quad \vdots$	
o	$\quad B$	
p	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$-I(n,o)

- Pour l'application de la règle, il est souvent nécessaire d'appliquer la règle R dans cette sous-preuve pour répéter les hypothèses de la dérivation principale ou les formules qui ont déjà été prouvées

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conditionnel matériel

Exemple

À prouver : $q \vdash_{L_0} p \rightarrow q$

1	q	Hypothèse
2	$\quad p$	Hypothèse
3	$\quad q$	R(1)
4	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$-I(2,3)

- Cet exemple illustre encore une fois que chaque formule qui est répétée par une application de la règle R est considérée comme prouvée

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – conditionnel matériel

Exemple

À prouver : $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash_{L_0} p \rightarrow r$

1	$p \rightarrow q$	Hypothèse
2	$q \rightarrow r$	Hypothèse
3	$\quad p$	Hypothèse
4	$\quad p \rightarrow q$	R(1)
5	$\quad q$	$\rightarrow$-E(3,4)
6	$\quad q \rightarrow r$	R(2)
7	$\quad r$	$\rightarrow$-E(5,6)
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$-I(3,7)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – disjonction

$\vee$-I – règle d'introduction de la disjonction

- La règle d'introduction de la disjonction nous permet d'ajouter à une preuve une nouvelle ligne avec une disjonction "$A \vee B$" ("B" peut être n'importe quelle formule) si la preuve contient déjà une ligne avec la formule "A" :

n	A	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$A \vee B$	$\vee$-I(n)

Ou bien :

n	B	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$A \vee B$	$\vee$-I(n)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – disjonction

$\vee$-E – règle d'élimination de la disjonction

- La règle d'élimination de la disjonction nous permet d'ajouter une ligne avec une formule "C", si une ligne de la preuve contient déjà la formule "$A \vee B$" et si nous avons déduit "C" de "A" dans une sous-preuve et aussi de "B" dans une autre sous-preuve :

n	$A \vee B$		
o		A	Hypothèse
$\vdots$		$\vdots$	
p		C	
q		B	Hypothèse
$\vdots$		$\vdots$	
r		C	
s	C		$\vee$-E(n,p,r)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – disjonction

$\vee$-E – règle d'élimination de la disjonction

- Notez qu'en effet, les deux sous-dérivations sont des preuves de "$A \rightarrow C$" et de "$B \rightarrow C$"
- L'idée de la règle est en effet que s'il est prouvé que "$A \vee B$", que "$A \rightarrow C$" et que "$B \rightarrow C$", cela nous donne aussi une preuve de "C"

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – négation

$\neg$-I – règle d'élimination de la négation

- La règle nous permet d'écrire "A" dans une nouvelle ligne, si une ligne précédente de la preuve contient "$\neg\neg A$" :

n	$\neg\neg A$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	A	$\neg$-E(n)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – négation

$\neg$-I – règle d'introduction de la négation

- La règle nous dit que si, dans une sous-preuve qui contient "A" comme hypothèse, on a déduit aussi bien "B" que sa négation "$\neg B$", alors on peut écrire "$\neg A$" dans une nouvelle ligne de la preuve :

n	$\quad A$	Hypothèse
$\vdots$	$\quad \vdots$	
o	$\quad B$	
$\vdots$	$\quad \vdots$	
p	$\quad \neg B$	
q	$\neg A$	$\neg$-I(n,o,p)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – négation

Exemple

À prouver : $\vdash_{L_0} \neg(p \wedge \neg p)$

1	$(p \wedge \neg p)$	Hypothèse
2	p	$\wedge$-E(1)
3	$\neg p$	$\wedge$-E(1)
4	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg$-I(1,2,3)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – biconditionnel

$\leftrightarrow$-E – règle d'élimination du biconditionnel

- Cette règle dit que si une preuve contient une ligne avec "$A \leftrightarrow B$" et une autre ligne avec l'une des deux formules "A" ou "B", alors, nous pouvons écrire la deuxième des deux formules dans une nouvelle ligne

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – biconditionnel

$\leftrightarrow$-E – règle d'élimination du biconditionnel

n	$A \leftrightarrow B$	
⋮	⋮	
o	A	
⋮	⋮	
p	B	$\leftrightarrow$-E(n,o)

Ou bien :

n	$A \leftrightarrow B$	
⋮	⋮	
o	B	
⋮	⋮	
p	A	$\leftrightarrow$-E(n,o)

La méthode de la déduction naturelle

Les règles – biconditionnel

$\leftrightarrow$-I – règle d'introduction du biconditionnel

- Cette règle dit que si la preuve contient des sous-preuves de "$A \rightarrow B$" et "$B \rightarrow A$", nous pouvons écrire "$A \leftrightarrow B$" dans une nouvelle ligne :

n	$\quad A$	Hypothèse
$\vdots$	$\quad \vdots$	
o	$\quad B$	
p	$\quad B$	Hypothèse
$\vdots$	$\quad \vdots$	
q	$\quad A$	
r	$A \leftrightarrow B$	$\vee$-I(o,q)

La méthode de la déduction naturelle

Quelques renseignements sur la construction des preuves

Renseignements

- Deux questions à se poser si on ne sait pas comment commencer à construire une preuve :[1]

1. Quelles règles est-ce que je peux appliquer aux hypothèses et qu'est-ce que je peux faire avec les formules qui en résultent ?
   - P. ex. si on a la conjonction "$A \wedge B$" comme hypothèse, on peut toujours en extraire "A" ou "B" ($\wedge$-E) ;
   - Si on a un conditionnel matériel "$A \rightarrow B$", il faut"A" pour pouvoir prouver "B" ($\rightarrow$-E), etc.

1. Cf. Lepage : "Éléments de logique contemporaine", 5.5, pp. 139-140.

La méthode de la déduction naturelle

Quelques renseignements sur la construction des preuves

Renseignements

2. Quelle règle est-ce qu'on peut appliquer à quelle sorte de formule pour arriver à la formule qui doit être prouvée ? Quelques possibilités :
   - P. ex si on veut prouver une formule de la forme "$A \rightarrow B$", une bonne idée pour commencer la preuve est d'introduire une sous-preuve qui commence avec l'hypothèse "A" et d'essayer à prouver "B" dans cette sous-preuve
   - Si on veut prouver une formule "A", on peut aussi essayer de prouver une formule de la forme "$\neg\neg A$" et d'appliquer la règle $\neg$-E ; "$\neg\neg A$" peut p. ex. être prouvée par une application de la règle $\neg$-I à une ligne qui contient "$\neg A$"
   - On peut p. ex. essayer de prouver une disjonction "$A \vee B$" telle que la formule qui doit finalement être prouvée peut être déduite de "A" et de "B" (application de $\vee$-E)

La méthode de la déduction naturelle

Quelques renseignements sur la construction des preuves

Renseignements

- Quelques renseignement concernant les sous-preuves :
  - Dans une preuve, on peut à tout moment créer une nouvelle sous-preuve pour introduire une nouvelle hypothèse pour ensuite appliquer une règle d'inférence
  - Les règles qui utilisent des sous-preuves sont : $\rightarrow$-I, $\vee$-E, $\neg$-I, $\leftrightarrow$-I
  - Ainsi, si vous devez introduire une formule avec un conditionnel matériel, une négation ou un biconditionnel comme connecteur logique principal ou si vous devez éliminer une disjonction, vous devez construire une sous-preuve

La méthode de la déduction naturelle

Quelques renseignements sur la construction des preuves

Renseignements

- La construction des preuves est une capacité qu'il faut apprendre sur le tas : il faut pratiquer l'application des règles d'inférence dans des preuves pour apprendre la déduction naturelle – il n'est pas suffisant d'apprendre les règles par cœur et de contempler des exemples de preuves
- Au début, il peut être plus efficace de procéder par tatônnement plutôt que d'essayer de comprendre le principe des preuves

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $p \wedge q \vdash_{L_0} p \vee q$

1	$p \wedge q$	Hypothèse
2	p	$\wedge$-E(1)
3	$p \vee q$	$\vee$-I(2)

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $\vdash_{L_0} p \rightarrow (q \vee p)$

1	$\quad p$	Hypothèse
2	$\quad (q \vee p)$	$\vee$-I(1)
3	$p \rightarrow (q \vee p)$	$\rightarrow$-I(1,2)

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $p \to q, \neg q \vdash_{L_0} \neg p$

1	$p \to q$	Hypothèse
2	$\neg q$	Hypothèse
3	$\quad p$	Hypothèse pour sous-preuve
4	$\quad p \to q$	R(1)
5	$\quad q$	$\to$-E(3,4)
6	$\quad \neg q$	R(2)
7	$\neg p$	$\neg$-I(3,5,6)

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $p \rightarrow q \vdash_{L_0} \neg q \rightarrow \neg p$

1	$p \rightarrow q$	Hypothèse
2	$\neg q$	Hypothèse pour sous-preuve
3	p	Hypothèse pour (sous-)sous-preuve
4	$p \rightarrow q$	R(1)
5	q	$\rightarrow$-E(3,4)
6	$\neg q$	R(2)
7	$\neg p$	$\neg$-I(3,5,6)
8	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow$-I(2,7)

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $p \wedge q \vdash_{L_0} \neg(\neg p \vee \neg q)$

1	$(p \wedge q)$	Hypothèse
2	$\quad \neg p \vee \neg q$	Hypothèse pour sous-preuve
3	$\quad\quad \neg p$	Hypothèse pour (sous-)sous-preuve
4	$\quad\quad \neg p$	R(3)
5	$\quad\quad \neg q$	Hypothèse pour (sous-)sous-preuve
6	$\quad\quad\quad p$	Hypothèse pour (sous-sous-)sous-preuve
7	$\quad\quad\quad \neg q$	R(5)
8	$\quad\quad\quad q$	$\wedge$-E(1)
9	$\quad\quad \neg p$	$\neg$-I(6,7,8)
10	$\quad \neg p$	$\vee$-E(2,4,9)
11	$\quad p$	$\wedge$-E(1)
12	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$\neg$-I(2,10,11)

La méthode de la déduction naturelle

Exemples

À prouver : $\vdash_{L_0} p \vee \neg p$

1	$\neg(p \vee \neg p)$	Hypothèse pour sous-preuve
2	p	Hypothèse pour (sous-)sous-preuve
3	$p \vee \neg p$	$\vee$-I(2)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	R(1)
5	$\neg p$	$\neg$-I(2,3,4)
6	$p \vee \neg p$	$\vee$-I(5)
7	$\neg(p \vee \neg p)$	R(1)
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg$-I(1,6,7)
9	$p \vee \neg p$	$\neg$-E(8)

La méthode de la déduction naturelle

Remarques sur cette dernière preuve

- En général, s'il n y a pas des hypothèses, il faut commencer la preuve directement avec une sous-preuve pour finalement appliquer une des règles $\rightarrow$-I, $\vee$-E, $\neg$-I ou $\leftrightarrow$-I
- Cette preuve (comme la première sous-preuve dans la preuve antérieure) a la forme d'un schéma d'inférence qu'on appelle *reductio ad absurdum*
- L'hypothèse en ligne 1 est introduit pour construire une sous-preuve qui, une fois complété, nous permet d'appliquer la règle $\neg$-I pour introduire la négation de cette hypothèse
- L'idée de ce schéma d'inférence est que pour prouver une formule, on peut montrer qu'une contradiction (soit, à la fois une formule et sa négation) peut être déduite de sa négation