Introduction à la logique des propositions III

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre d'automne 2019 – 21 octobre 2019

Équivalence logique

Définition : équivalence des formules Deux formules de L_0 sont équivalentes si et seulement si elles ont la même valeur de vérité relativement à chaque distribution de valeurs de vérité des formules atomiques qu'elles contiennent.

- Selon la logique des propositions, deux formules ont la même signification/la même condition de vérité si et seulement si elles ont la même distribution de valeurs de vérité dans les colonnes d'une table de vérité
- Une méthode générale pour démontrer l'équivalence des formules : construire une table de vérité qui contient les deux formules et qui montre qu'elles ont toujours les mêmes valeurs de vérité

Le choix des connecteurs logiques

- Comme nous l'avons vu, on peut utiliser des tables de vérité pour définir les connecteurs logiques qui sont contenus dans L_0, "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$"
- Deux questions :
  1. Avons-nous besoin de tous ces connecteurs logiques, ou est-ce qu'on peut construire un langage formel qui nous permette d'exprimer toutes les mêmes propositions que mais qui contienne moins d'opérateurs ?
  2. Est-ce qu'il y a d'autres connecteurs logiques ?

Le choix des connecteurs logiques

Ad 1 : Une base plus étroite pour la logique des propositions

- La réponse à la première question est positive : on peut construire un tel langage, car on peut définir certains connecteurs logiques de L_0 au moyen des autres
- Une option standard : ne garder que "$\neg$" et "$\wedge$" et définir les autres connecteurs logiques au moyen de ces deux connecteurs
- Comment le faire ? On montre que les formules qui contiennent les autres connecteurs sont équivalentes à des formules qui contiennent seulement les deux connecteurs logiques de base

Le choix des connecteurs logiques

Ad 1 : Une base plus étroite pour la logique des propositions

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**

TABLE – Table de vérité montrant l'équivalence entre "$p \vee q$" et "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$"

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**

TABLE – Table de vérité montrant l'équivalence entre "$p \rightarrow q$" et "$\neg p \vee q$"

Le choix des connecteurs logiques

Ad 1 : Une base plus étroite pour la logique des propositions

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

TABLE – Table de vérité montrant l'équivalence entre "$p \leftrightarrow q$" et "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$"

- Remarque : pour établir des équivalences, on peut réutiliser les équivalences qu'on a déjà établies (comme je l'ai fait ici), mais il est aussi possible de construire des tables de vérité pour montrer que "$p \rightarrow q$" est équivalent à "$\neg(p \wedge \neg q)$", et que "$p \leftrightarrow q$" est équivalent à "$\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$"

Le choix des connecteurs logiques

Ad 1 : Une base plus étroite pour la logique des propositions

- Les trois tables de vérité montrent que nous avons seulement besoin des connecteurs logiques "$\neg$" et "$\wedge$" pour exprimer tout ce qu'on peut exprimer avec les formules de L_0
- La première table montre que la disjonction peut être définie au moyen de la conjonction et de la négation
- La deuxième montre que le conditionnel matériel peut être défini au moyen de la négation et de la disjonction
- la troisième montre que le biconditionnel peut être défini au moyen du conditionnel et de la conjonction

Le choix des connecteurs logiques

Ad 1 : Une base plus étroite pour la logique des propositions

- Notez que l'ensemble $\{\neg, \wedge\}$ n'est pas la seule combinaison de connecteurs logiques qui nous permette de définir tous les autres connecteurs logiques, on peut p. ex. aussi utiliser "$\neg$" et "$\vee$" ou "$\neg$" et "$\rightarrow$" (exercice facultatif : en utilisant des tables de vérité, pouvez vous définir les autres connecteurs logiques sur ces bases ?)

Le choix des connecteurs logiques

Ad 2. : Autres connecteurs logiques

- On peut définir d'autres connecteurs logiques. En fait, nous en avons déjà rencontré un la séance dernière :
- Chaque vérifonction correspond à un connecteur logique – on pourrait définir un connecteur logique sur la base de chaque fonction qui attribue une valeur de vérité à une formule complexe sur la base des valeurs de vérité de toutes les formules desquelles elle est composée
- Les connecteurs logiques contenus dans l'alphabet de sont sélectionnés sur la base de leur correspondance (parfois imparfaite) à des expressions du langage naturel utilisé pour formuler des inférences et arguments

Le choix des connecteurs logiques

Ad 2. : Autres connecteurs logiques

- Un connecteur qui n'est pas souvent utilisé dans des raisonnements, mais qui est très intéressant pour des raisons systématiques, est la barre de Sheffer ("Sheffer stroke") – "|" ("$p \mid q$" correspond à l'expression française "Ne pas p et q ensemble"

Le choix des connecteurs logiques

Ad 2. : Autres connecteurs logiques

p	q	$p \mid q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$p \mid q$"

- Si on a seulement ce connecteur logique, on peut définir tous les connecteurs logiques de L_0 ; p. ex. "$\neg p$" est équivalent à "$p \mid p$" et "$p \rightarrow q$" à "$p \mid (p \mid q)$", ... (exercice facultatif : en utilisant des tables de vérité, pouvez vous définir les autres connecteurs logiques à partir de la barre de Sheffer ?)

Tautologies et contradictions

Tautologies

- Il y a une classe de formules complexes qui sont vraies, quelle que soit la distribution des valeurs de vérité entre les formules atomiques qu'elles contiennent
- On les appelle *tautologies*
- La vérité des tautologies est déterminée uniquement sur la base de leur forme logique, c'est-à-dire sur la base de la distribution particulière des connecteurs logiques dans la formule tautologique
- Le symbole "$\top$" est utilisé pour dénoter une tautologie arbitraire (dans notre logique, c'est une métavariable)
- Une phrase/proposition qui a la forme d'une tautologie ne peut être fausse, quel que soit le contenu des propositions moins complexes quelle contient – p. ex. "Robert Michels est champion du monde de football ou Robert Michels n'est pas champion du monde de football."

Tautologies et contradictions

Tautologies

Deux exemples :

p	$p \vee \neg p$
V	**V**
F	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$p \vee \neg p$"

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee q)$
V	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$(p \vee q) \rightarrow (p \vee q)$"

Tautologies et contradictions

Tautologies

Quelques tautologies importantes :

- $A \vee \neg A$ (Principe du tiers exclu)
- $\neg(A \wedge \neg A)$ (Principe de non-contradiction)
- $A \leftrightarrow (A \vee A)$ (idempotence de la disjonction)
- $A \leftrightarrow (A \wedge A)$ (idempotence de la conjonction)
- $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ (commutativité de la disjonction)
- $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ (commutativité de la conjonction)
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ (commutativité du biconditionnel)
- $(A \vee (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (associativité de la disjonction)
- $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (associativité de la conjonction)
- $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (distributivité de la disjonction)
- $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (distributivité de la conjonction)

Tautologies et contradictions

Quelques tautologies importantes :

- $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ (loi de De Morgan)
- $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (loi de De Morgan)
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- $A \rightarrow (A \vee B)$
- $(A \wedge B) \rightarrow A$
- $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
- $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
- $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- $((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A$
- (Notez l'usage des métavariables – A, B, C peuvent être atomiques ou complexes !)

Tautologies et contradictions

Contradictions

- Les formules complexes qui sont fausses, quelle que soit la distribution des valeurs de vérité entre les formules atomiques qu'elles contiennent, sont appelées contradictions
- La fausseté des contradictions est déterminée par leur forme logique
- Le symbole "$\bot$" est utilisé pour dénoter une contradiction arbitraire

Tautologies et contradictions

Contradictions

Deux exemples :

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

TABLE – Table de vérité pour “$p \wedge \neg p$”

p	$p \to p$	$\neg(p \to p)$
V	**V**	**F**
F	**V**	**F**

TABLE – Table de vérité pour “$\neg(p \to p)$”

Tautologies et contradictions

Quelques remarques sur les tautologies et les contradictions

- Si deux formules "A" et "B" sont équivalentes, la formule "$A \leftrightarrow B$" est une tautologie (et cela implique que "$A \rightarrow B$" et "$B \rightarrow A$" sont aussi des tautologies)
- La négation de chaque tautologie est une contradiction et la négation de chaque contradiction est une tautologie
- Les propositions ou phrases d'un langage naturel qui ont la forme logique d'une tautologie ou d'une contradiction ne nous disent rien sur le monde ; elles ne transmettent pas d'information

Tautologies et contradictions

Quelques remarques sur les tautologies et les contradictions

Importance des contradictions et des tautologies dans la philosophie :

- Le concept de contradiction est directement lié au concept d'inconsistance : une théorie est inconsistante si elle implique une contradiction (p. ex. "$p \wedge \neg p$") – si on peut montrer qu'une théorie est inconsistante, c'est l'une des objections potentielles les plus fortes contre cette théorie
- Il y a aussi une connexion importante entre le concept de tautologie et de conséquence logique dont nous parlerons à la fin du semestre

Conséquence logique

- On utilise le symbole "$\models$" pour exprimer le concept central de la logique, le concept de *conséquence logique*
- Existe-il un seul et véritable concept de conséquence logique ?
- Cette question est l'objet d'une discussion controversée en philosophie de la logique, mais elle n'est pas pertinente pour nous :
- Le concept de conséquence logique pertinent pour la logique est un concept qui est relativisé à un langage formel

Conséquence logique

- Pour nous, c'est le concept de conséquence logique du langage de la logique des propositions L_0 qui est dénoté par le symbole "$\models_{L_0}$"
- D'autres logiques ont leur propres concepts relatifs de conséquence logique
- Notez bien que "$\models$" et "$\models_{L_0}$" ne sont pas des connecteurs logiques de notre langage objet L_0 ; il s'agit de concepts du méta-langage !
- Le concept de conséquence logique est un concept relationnel : **une** formule peut être conséquence logique **d'une ou de plusieurs** formules

Conséquence logique

La définition de la conséquence logique

- Pour définir le concept, nous allons donc utiliser des variables qui représentent des ensembles de formules de L_0 $\Delta, \Gamma, \ldots$ – un tel ensemble peut contenir une ou plusieurs formules de L_0, p. ex. $\{p \vee q\}$,$\{p, p \rightarrow \neg q\}$ ou bien $\{A, B, C, D\}$
- En utilisant ces nouveaux symboles, nous pouvons définir le concept de conséquence logique de L_0 :

Définition : conséquence logique $\Delta \models_{L_0} A$ si et seulement s'il est impossible que les formules dans Δ soient vraies, mais que A soit fausse.

- "$\Delta \models_{L_0} A$" est prononcé "A est conséquence logique de Δ en L_0." ou "A suit logiquement de Δ en L_0."

Conséquence logique

- S'il est parfaitement clair dans un contexte particulaire qu'on parle du concept de conséquence logique relatif à L_0, on peut omettre la relativisation
- Notez que cette définition généralise la définition de la validité des arguments : un argument avec les prémisses $A^*, B^*, C^*, \ldots$ et une conclusion D^* ($A^*, B^*, C^*, \ldots$ étant les phrases en langage naturel qui sont traduites par les formules de L_0 $A, B, C, \ldots$ et D^* la phrase traduite par la formule D) est valide si et seulement si $\{A, B, C, \ldots\} \vDash_{L_0} D$
- Notez aussi un cas particulier très important : Δ peut être vide ($\Delta = \emptyset$) ; une formule qui est une conséquence logique de l'ensemble vide est une *vérité logique* ; elle suit logiquement, quelles que soient les suppositions

Conséquence logique

Vérité logique

- Cela nous donne la définition de la vérité logique suivante :

Définition : vérité logique $\vDash_{L_0} A$ si et seulement s'il est impossible que A soit fausse.

- Quelles formules sont des vérités logiques ? – les tautologies !
- Dans le contexte de la logique des propositions, "il est impossible que A soit fausse" veut dire qu'il n'existe aucune distribution possible des valeurs de vérité parmi les formules atomiques contenues dans A telle que A est fausse
- Ou en d'autres mots : la colonne sous A dans une table de vérité construite par A ne contient que la valeur de vérité **V**

Conséquence logique

Vérité, fausseté et contingence logique

- Donc, une formule est une vérité logique en L_0 si elle est une tautologie
- Similairement, une formule est une fausseté logique en L_0 (soit une formule de L_0 qui ne peut pas être vraie) si elle est une contradiction
- Les formules qui ne sont ni des vérités logiques, ni des faussetés logiques sont appelées *contingences logiques*

La méthode des tables de vérité

- Nous avons noté précédemment qu'un argument est valide si et seulement si la traduction de sa conclusion en L_0 est une conséquence logique des traductions de ses prémisses en L_0
- Il y a une connexion importante entre les concepts de conséquence logique et de tautologie qui nous permet d'évaluer la validité des arguments sur la base d'une table de vérité
- Cette connexion s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème $\Delta, A \vDash_{L_0} B$ si et seulement si $\Delta \vDash_{L_0} A \rightarrow B$

- En français, le théorème dit que si une formule B est une conséquence logique (relativement à L_0) d'un ensemble de formules Δ et d'une formule A (soit : de l'ensemble qui contient toutes les formules de Δ et A), le conditionnel matériel de forme $A \rightarrow B$ est une conséquence logique (relativement à L_0) de l'ensemble des formules Δ

La méthode des tables de vérité

- Notez que Δ peut aussi être vide : dans ce cas, le théorème nous dit que B est une conséquence logique de A si et seulement si $A \rightarrow B$ est une *vérité logique*
- Ce cas particulier du théorème implique que si $A \rightarrow B$ est une *vérité logique*, alors B est une conséquence logique de A (c'est simplement le conditionnel qui nous donne la condition nécessaire pour être conséquence logique)

La méthode des tables de vérité

- Comme une formule est une vérité logique en L_0 si elle est une tautologie et comme les tables de vérité nous donnent une méthode formelle pour déterminer si une formule est une tautologie, elles nous donnent donc aussi une méthode formelle pour déterminer si une formule B est une conséquence logique (en L_0) d'une formule A :

Observation $A \vDash_{L_0} B$ si et seulement si la table de vérité de $A \rightarrow B$ montre que cette formule est une tautologie

- Donc, les tables de vérité nous donnent une *méthode formelle* pour déterminer si une formule A est une conséquence logique en L_0 d'une formule B

La méthode des tables de vérité

La méthode appliquée aux arguments

- Par conséquence, nous pouvons utiliser les tables de vérité pour vérifier la validité d'un argument avec la prémisse A et la conclusion B en L_0 :
- L'argument est valide si cette formule est une tautologie et non valide si elle n'est pas une tautologie

La méthode des tables de vérité

La méthode appliquée aux arguments

- Mais que faire si un argument a plusieurs prémisses ? [1]
- Notez que la formule “A” peut avoir la forme d'une conjonction de formules
- En particulier, elle peut être une conjonction de toutes les formules qui sont les traductions des prémisses d'un argument
- Donc pour évaluer la validité d'un argument avec plusieurs prémisses traduites par les formules $A, B, \ldots$ et une conclusion traduite par C, on utilise une table de vérité pour le conditionnel $((A \wedge B) \wedge \ldots) \rightarrow C$ qui contient la conjonction de toutes les prémisses en antécédent et la conclusion en conséquent

1. Une restriction : le nombre des prémisses doit être fini, car L_0 n'admet pas de formules d'une longueur infinie

La méthode des tables de vérité

La méthode appliquée aux arguments

- En résumé, pour évaluer la validité d'un argument en L_0 on :
  1. Identifie ses prémisses et sa conclusion
  2. Traduit ses prémisses et sa conclusion en langage formel de L_0
  3. Sur la base de $A, B, \ldots$ (les formules qui correspondent aux prémisses) et C (la formule qui correspond à la conclusion), on construit la table de vérité du conditionnel $((A \wedge B) \wedge \ldots) \rightarrow C$
  4. Finalement, on détermine si l'argument est valide : il l'est si ce conditionnel est une tautologie et il ne l'est pas si ce conditionnel n'est pas une tautologie

Rappel : "$\rightarrow$" et "$\vDash_{L_0}$" sont des concepts distincts !

- Alors qu'il y a une connexion systématique entre une affirmation de la forme $A \vDash_{L_0} B$ et une formule de L_0 de la forme $A \rightarrow B$, l'affirmation et la formule ne sont pas identiques : l'affirmation appartient au méta-langage, la formule au langage objet

La méthode des tables de vérité : trois exemples

Exemple : modus ponens

1. Si Bernard mange des frites, il est content.
2. Bernard mange des frites.
3. $\therefore$ Il est content.

- On utilise les traductions suivantes : p – "Bernard mange des frites.", q – "Il est content." et on arrive à :

1'. $p \rightarrow q$

2'. p

3'. $\therefore q$

La méthode des tables de vérité

Exemple : modus ponens

- Pour évaluer la validité de cet argument, on le transforme en formule conditionnelle de L_0 : $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
- Finalement, on construit une table de vérité pour cette formule :

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour “$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$”

La méthode des tables de vérité

Exemple : modus ponens

- La table de vérité montre que l'argument est valide.
- En fait, elle nous donne une *preuve sémantique* de la validité de l'argument et, plus généralement, du fait que $p \to q, p \vDash_{L_0} q$
- L'argument a la forme d'un schéma d'inférence valide qui s'appelle *modus ponens*
- Notre preuve montre que chaque argument de la même forme (chaque argument qui est conforme au schéma d'inférence *modus ponens*) est valide (rappel : la logique ignore le contenu des phrases)

La méthode des tables de vérité

Exemple : modus tollens

1. Si Anne a trouvé sa clé, elle rentre chez elle.
2. Elle ne rentre pas chez elle.
3. $\therefore$ Anne n'a pas trouvé sa clé.

- On utilise les traductions suivantes : p – "Anne a trouvé sa clé.", q – "Elle rentre chez elle." et arrive à :

1'. $p \rightarrow q$

2'. $\neg q$

3'. $\therefore \neg p$

La méthode des tables de vérité

Exemple : modus tollens

- Cet argument correspond à la formule de L_0 "$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$" qui est une tautologie :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \land \neg q$	$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$"

- Cette table de vérité nous donne une preuve du fait que $p \to q, \neg q \vDash_{L_0} \neg p$, soit de la validité du schéma d'inférence *modus tollens*
- Chaque argument de cette forme est valide

La méthode des tables de vérité

Exemple : l'affirmation du conséquent (sophisme)

- L'affirmation du conséquent est un sophisme, une forme d'argument invalide :

1. Si Claude est amoureux d'Anne, il va se marier avec elle.
2. Il va se marier avec elle.
3. $\therefore$ Claude est amoureux d'Anne.

- On utilise les traductions suivantes : p – "Claude est amoureux d'Anne.", q – "Il va se marier avec elle." et on arrive à :

1'. $p \rightarrow q$

2'. q

3'. $\therefore p$

La méthode des tables de vérité

Exemple : l'affirmation du conséquent (sophisme)

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$((p \to q) \wedge q) \to p$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$((p \to q) \wedge q) \to p$"

- La table de vérité nous donne un contrexemple : si p est fausse et q est vraie, $(p \to q)$ et q (les prémisses) sont vraies, mais p (la conclusion) est fausse
- Donc elle nous donne une preuve du fait que $p \to q, q \not\models_{L_0} p$ – que p *n'est pas une conséquence logique* en L_0 des formules $p \to q$ et q
- La table nous montre qu'en général, l'affirmation du conséquent n'est pas un schéma d'inférence valide

La méthode des tables de vérité

Tables de vérité et types de preuves

- En général, une preuve en L_0 sur la base d'une table de vérité sert à établir la vérité, fausseté, ou contingence logique d'une formule de L_0
- Au travers d'une telle preuve, on peut établir une affirmation du méta-langage concernant les relations logiques entre des formules de L_0

La méthode des tables de vérité

Tables de vérité et types de preuves

- Jusque-là nous avons rencontré trois sortes de preuves :
  1. Preuve directe d'un des faits suivants :
     1.1 $\vDash_{L_0} A$ (A est une vérité logique en L_0) – la table de vérité pour A montre que A est une tautologie
     1.2 $\vDash_{L_0} \neg A$ (A est une fausseté logique en L_0) – la table de vérité pour A montre que A est une contradiction
     1.3 $\nvDash_{L_0} A$ et $\nvDash_{L_0} \neg A$ (A est une contingence logique en L_0) – la table de vérité pour A montre que A n'est ni une tautologie, ni une contradiction
  2. Preuve directe du fait que $A \vDash_{L_0} B$ (B est une conséquence logique de A en L_0) – la table de vérité pour $A \rightarrow B$ montre que cette formule est une tautologie

La méthode des tables de vérité

Tables de vérité et types de preuves

3. Preuve d'équivalence de A et B (du fait que $A \vDash_{L_0} B$ et $B \vDash_{L_0} A$) –
   - Soit la table de vérité pour $A \leftrightarrow B$ montre que cette formule est une tautologie
   - Soit les tables de vérité pour A et pour B montrent que les deux formules ont les mêmes conditions de vérité/la même distribution de valeurs de vérité en fonction de toutes les distributions possibles des valeurs de vérités parmi les formules atomiques contenues dans A et B

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

La méthode des tables de vérité est une méthode sémantique

- Si on p. ex. construit une table de vérité pour prouver que la formule "$p \vee \neg p$" est une vérité logique, cette preuve se base sur les significations (soit les conditions de vérité) des connecteurs logiques "$\neg$" et "$\vee$" – la table de vérité montre que toute formule de cette forme logique doit être vraie
- En général, on distingue entre des méthodes formelles sémantiques et syntaxiques
- Les *méthodes formelles sémantiques*, comme la méthode des tables de vérité, produisent des *preuves sémantiques*
- Elles se basent sur les significations des formules pertinentes
- La méthode des tables de vérité est la seule méthode formelle sémantique que nous discuterons dans ce cours
- Une alternative sera présentée dans le cours sur la logique des prédicats qui suit au prochain semestre

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

Méthodes syntaxiques

- Il existe aussi des méthodes formelles syntaxiques qui produisent des preuves syntaxiques
- Ces méthodes se basent sur des règles de déduction pour établir qu'une formule peut être, ou ne peut pas être, dérivée des formules qui sont acceptées comme suppositions (p. ex. parce qu'elles sont des axiomes de notre logique)
- Ces règles de déduction sont des règles purement syntaxiques : elles nous permettent de passer d'une formule ou d'une séquence de formules à une autre formule ou séquence de formules sans prendre en considération leurs significations
- Dans un certain sens, on peut donc dire que les méthodes syntaxiques sont des méthodes pour la manipulation des séquences de symboles

Méthodes formelles sémantiques et syntaxiques

Méthodes syntaxiques

- Parmi les méthodes formelles syntaxiques on trouve par exemple :
  - la méthode axiomatique
  - la déduction naturelle
  - la méthode des arbres
- Dans ce cours, nous discuterons deux de ces méthodes, la déduction naturelle et la méthode des arbres
- La méthode axiomatique ne sera pas abordée car les deux autres sont plus faciles à appliquer en pratique
- Nous commencerons par la déduction naturelle lors de la prochaine séance du cours