Introduction à la logique des propositions II

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre d'automne 2019 – 7 octobre 2019

Signification en L_0

Remarque – présentation de la sémantique

- La sémantique de L_0 est définie seulement pour les formules du langage formel L_0, et pas pour les phrases d'un langage naturel comme le français ou pour les propositions
- Pour expliquer la sémantique de L_0, je parle néanmoins de la signification des propositions qui sont exprimées par des phrases françaises

Signification en L_0

Rappel

- La sémantique définit des règles pour déterminer la signification de toutes les phrases d'un langage
- Que signifie "signification" dans ce contexte ?
- Une indication donnée dans la dernière séance :
- La logique ne s'occupe pas du contenu des propositions

Signification en L_0

- Donc, “signification” ne peut pas signifier ici l’information contenue dans une proposition
- Est-ce qu’il y a une autre interprétation de “signification” qui est plus adaptée à la logique ? – Oui !

Signification en L_0

Conditions de vérité

- Selon quelques philosophes (p. ex. le jeune Wittgenstein du Tractatus Logico-Philosophicus), la signification d'une proposition est sa *condition de vérité*, la condition qui doit être rempli pour que la proposition soit vraie
- Une condition de vérité est toujours défini pour des phrases ou formules (et pas directement pour les connecteurs logiques !)
- La sémantique de la logique classique des propositions s'occupe strictement des conditions de vérité de ces formules
- Elle ignore tout autre aspect ou toute autre interprétation de la signification [1]

1. Ces interprétations sont discutées en philosophie du langage.

Signification en *L_0*

Conditions de vérité

- Considérons p. ex. la proposition exprimée par la phrase :

  "Anne aime les frites et Bernard est timide."

- *L'information contenue dans cette proposition* : Deux objets (Anne et Bernard) ont certaines propriétés (pour Anna qu'elle aime les frites et pour Bernard qu'il est timide) – **insignifiant pour la sémantique de la logique des proposition**
- *La condition de vérité de la proposition* : La proposition est vraie si et seulement si les propositions exprimées par "Anna aime les frites." et par "Bernard est timide." sont toutes les deux vraies – **pertinent pour la sémantique de la logique des propositions**

Signification en L_0

Pourquoi se limiter de cette façon en logique ? Deux raisons :

1. Le concept central de la logique est la *conséquence logique* (cf. définition de validité) et le seul aspect pertinent de la signification pour ce concept sont les conditions de vérité des propositions
2. La logique s'occupe de *la forme logique des propositions* (et de la forme des arguments) ; la forme logique d'une proposition est exclusivement déterminée par les connecteurs logiques qu'elle contient ; la signification des connecteurs logiques s'explique complètement sur la base des conditions de vérité des propositions qui les contiennent

Vérifonctionalité des connecteurs logiques

- La deuxième raison est directement liée à une thèse importante de la logique des propositions :

  Thèse : vérifonctionnalité Les connecteurs logiques sont des opérateurs vérifonctionnels.

Vérifonctionalité des connecteurs logiques

- Syntaxiquement, les connecteurs logiques sont des opérateurs propositionels : selon les règles de formation des formules de L_0, on peut les combiner avec des variables propositionelles pour former des formules – p. ex. "p" se combine avec "$\neg$" pour former "$\neg p$"
- La syntaxe nous dit que chaque formule de L_0 est construite à partir des propositions atomiques et des connecteurs logiques (suivant les règles de formation)
- La sémantique suit la syntaxe : elle spécifie les conditions de vérité de toutes les séquences de symboles de l'alphabet de L_0 bien formées (de toutes les formules de L_0)

Vérifonctionalité des connecteurs logiques

- Sémantiquement, les connecteurs logiques correspondent à des fonctions qui prennent des valeurs de vérité comme entrée (input) et produisent comme sortie (output) une valeur de vérité (ils sont des opérateurs *vérifonctionnels*)
- Considérons un exemple : la négation "$\neg$" est (selon la perspective sémantique) une fonction qui prend la valeur de vérité d'une proposition, p. ex. la formule atomique ou complexe "A" comme entrée, et nous donne le valeur de vérité de la formule complexe "$\neg A$" comme sortie

Vérifonctionalité des connecteurs logiques

- Pour chaque connecteur logique, sa vérifonction associée contribue essentiellement à spécifier les conditions de vérité de toutes les formules qui le contiennent
- Le valeur de vérité d'une proposition est sa vérité ou fausseté – p. ex. la proposition exprimée par "Robert Michels enseigne un cours de logique à Neuchâtel en 2019." a la valeur de vérité **vrai** et la proposition exprimée par "Robert Michels est champion du monde de football." a la valeur de vérité **faux**
- Comme toute fonction, *chaque vérifonction a une sortie unique* : les vérifonctions prennent une ou plusieurs valeurs de vérité et nous donnent toujours une seul et même valeur de vérité pour la ou les mêmes entrées

Bivalence de la sémantique classique de L_0

- Quelles valeurs de vérité y a t'il ?
- La sémantique de la logique classique des propositions a deux valeurs de vérité :

Thèse : bivalence La sémantique classique de L_0 est telle qu'à chaque formule de L_0 est assignée une des deux valeurs de vérité **vrai** ou **faux**, mais pas les deux.

- Cette thèse implique que chaque condition de vérité d'une formule nous donne aussi une condition de fausseté – si la condition de vérité n'est pas rempli, la formule est fausse

Bivalence de la sémantique classique de L_0

- La thèse de bivalence est essentielle à la logique des propositions **classique**
- Chaque logique qui la rejette (et p. ex. utilise une troisième valeur de vérité indéfini ou ni vrai, ni faux ; ou qui admet que certaines formules n'ont aucune valeur de vérité ; ou qui associe toutes les deux valeurs de vérité à des formules) est une logique **non-classique** (p. ex. *fuzzy logique*, logique trivalente, . . .)
- Pourquoi adopter une logique non-classique ? – Une raison possible (mais controversé) est l'idée qu'il y a des propositions qui sont ni vraies ni fausses, p. ex. des propositions qui décrivent certains états indéterminés en physique quantique ou la proposition autoréférentielle du paradoxe du menteur exprimé par "Cette propositions est fausse."

Compositionalité de la sémantique classique de L_0

Thèse : compositionalité de la sémantique de L_0 La valeur de vérité de chaque formule de L_0 est exclusivement déterminée par les valeurs de vérité des formules qui la composent syntaxiquement.

Compositionalité de la sémantique classique de L_0

- La thèse de compositionalité et le fait que la construction syntaxique de toute formule de L_0 procède d'une ou de deux formules atomiques impliquent que la valeur de vérité de chaque formule complexe de L_0 est *déterminée par le ou les valeurs de vérité de ces formules atomiques*
- En d'autres mots : si on connaît les valeurs de vérité des formules atomiques, on connaît aussi les valeurs de vérité de toutes les formules complexes composées par ces formules atomiques

Compositionalité de la sémantique classique de L_0

- Par conséquent, la sémantique de L_0 nous donne un dispositif pour déterminer la valeur de vérité de chaque formule complexe sur la base des valeurs de vérité des formules atomiques
- Notez qu'elle ne nous donne pas un dispositif pour déterminer les valeurs de vérité des formules atomiques – ces formules n'ont pas de structure logique dont la sémantique de L_0 s'occupe
- Conjointement avec la thèse de la bivalence, la thèse de la compositionalité implique que chaque formule de L_0 est vraie ou fausse, mais pas les deux

Tables de vérité

- La sémantique de la logique classique des propositions peut être présentée de façons différentes
- Une façon intuitive se base sur les tables de vérité

Tables de vérité

- Une table de vérité est toujours construite pour une ou plusieurs formules
- Une table de vérité représente toutes les vérifonctions et toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité des formules atomiques nécessaires pour déterminer la valeur de vérité de ces formules
- Dans les tables de vérité, nous utilisons les abréviations suivantes pour les deux valeurs de vérité : **vrai** = **V**, **faux** = **F**
- Les tables de vérité peuvent aussi être utilisées pour définir les vérifonctions qui correspondent aux connecteurs logiques, soit les conditions de vérité des formules qui les contiennent

Tables de vérité

La négation

- "$\neg$" – négation ("ne ... pas" ou, sous forme d'opérateur propositionel : "il n'est pas le cas que ... ") – "Alexandra n'aime pas les aubergines." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$\neg p$"
- La négation correspond à la vérifonction qui inverse la valeur de vérité quelle reçoit comme entrée

Tables de vérité

La négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$\neg p$"

- Si "p" correspond à "Alexandra aime les aubergines.", la table de vérité nous montre que "Alexandra *n*'aime *pas* les aubergines." est fausse si "Alexandra aime les aubergines." est vraie, et qu'elle est vraie si "Alexandra aime les aubergines." est fausse

Tables de vérité

La conjonction

- "$\wedge$" – conjonction ("... et ... ") – "Alexandra aime les aubergines *et* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \wedge q$"
- La conjonction correspond à la vérifonction qui a comme sortie **V** si et seulement si elle a comme entrées **V** et **V** (et elle a **F** comme sortie dans tous les autres cas) :

Tables de vérité

La conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Table – Table de vérité pour "$p \wedge q$"

- Si "p" correspond à "Alexandra aime les aubergines." et "q" à "Bernard est timide.", alors "Alexandra aime les aubergines et Bernard est timide." est vraie si "Alexandra aime les aubergines." et "Bernard est timide." sont vraies, et la phrase conjonctive est fausse si au moins une des deux phrases qui la composent est fausse

Tables de vérité

Comment construire une table de vérité ?

- La première ligne de la table contient : i) toutes les variables propositionnelles/formules atomiques contenues dans la formule (complexe) et ii) la formule (complexe) ou les formules complexes pour lesquelles on construit la table de vérité
- Les colonnes sous les formules atomiques contiennent toutes les combinaisons des valeurs de vérité possibles de ces formules, une combinaison dans chaque ligne
- La colonne sous chaque formule complexe contient dans chaque ligne la valeur de vérité qui est assignée à la combinaison des valeurs de vérité des formules atomiques par la combinaison des vérifonctions contenues dans la formule complexe

Tables de vérité

La disjonction

- "$\vee$" – disjonction ("…ou …") – "Alexandra aime les aubergines *ou* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \vee q$"
- Notez que "ou" en Français est ambigu : il est utilisé pour exprimer parfois la disjonction inclusive, parfois la disjonction exclusive
- Ces deux types de disjonction correspondent à deux différents connecteurs logiques

Tables de vérité

La disjonction inclusive

- "$\vee$", la disjonction inclusive est la vérifonction qui a **V** comme sortie si et seulement si elle reçoit au moins une fois **V** comme entrée :

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

TABLE – Table de vérité pour "$p \vee q$"

- La table de vérité montre que "Alexandra aime les aubergines ou Bernard est timide." (disjonction inclusive) est vraie si au moins une des deux phrases "Alexandra aime les aubergines." et "Bernard est timide." est vraie

Tables de vérité

La disjonction exclusive

- "W", la disjonction exclusive est la vérifonction qui a **V** comme sortie si et seulement si elle reçoit exactement une fois **V** comme entrée :

p	q	pWq
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

TABLE – Table de vérité pour "$p \vee q$"

- "La chemise est entièrement verte ou elle est entièrement rouge" (disjonction exclusive) est vraie si exactement une des deux phrases "La chemise est entièrement verte." et "La chemise est entièrement rouge" est vraie

Tables de vérité

La disjonction en logique

- Si on n'est pas en train d'évaluer un argument qui contient une disjonction exclusive, on travaille avec la disjonction inclusive en logique
- La disjonction exclusive peut-être définie comme suit :
  $pWq =_{def} (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Tables de vérité

Le conditionnel matériel

- "$\rightarrow$" – conditionnel matériel ("si …, …") – "*Si* Alexandra aime les aubergines, Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \rightarrow q$"
- Dans une formule de la forme "$A \rightarrow B$", "A" est appelé *l'antécédent* et "B" *le conséquent* du conditionnel
- "$p \rightarrow q$", le conditionnel matériel est la vérifonction qui a **V** comme sortie si et seulement si elle reçoit comme première entrée **V** (la valeur de vérité de "p") et comme deuxième entrée **F** (la valeur de vérité de "q")

Tables de vérité

Le conditionnel matériel

p	q	$p \rightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$p \rightarrow q$"

- Notez que l'ordre des entrées est pertinent dans le cas du conditionnel matériel (au contraire de la conjonction, des deux types de disjonction, et du biconditionnel !)

Différences entre le conditionnel en français et le conditionnel matériel

- Le conditionnel matériel ne nous donne pas une traduction parfaite de l'expression française "si . . . , . . . " – deux exemples :
- Si "si" est traduit par le conditionnel matériel, "Si Neuchâtel est une ville en Uruguay, la lune est faite de fromage." est vraie, car l'antécédent du conditionnel matériel est faux – normalement, on ne veut pas dire que cette phrase est vraie
- De la même manière, on ne veut pas dire que "Si je suis mort, j'enseigne un cours de logique à Neuchâtel." est vraie, mais si "si" est traduit par le conditionnel matériel, la phrase est vraie, car son conséquent est vrai

Différences entre le conditionnel en français et le conditionnel matériel

- Une motivation possible pour la sémantique définie par cette table de vérité : nous utilisons la construction conditionnelle en langue naturelle pour exprimer que le conséquent suit de l'antécédent
- Si l'antécédent est faux, il ne peut pas arriver que le conséquent ne suive pas de l'antécédent, donc le conditionnel n'est pas faux – comme notre logique est bivalente, cela implique la vérité du conditionnel
- La logique et sémantique du conditionnel en langage naturel est un sujet controversé en philosophie du langage, mais en logique on travaille avec le conditionnel matériel

Tables de vérité

Le biconditionnel matériel

- "$\leftrightarrow$" – équivalence matérielle ("...si et seulement si ...") – "Alexandra aime les aubergines *si et seulement si* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \leftrightarrow q$"
- "$p \leftrightarrow q$", le biconditionnel (matériel) est la vérifonction qui a **V** comme sortie si et seulement si elle reçoit deux fois la même valeur de vérité comme entrée

Tables de vérité

Le biconditionnel matériel

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$p \leftrightarrow q$"

- Comme la disjonction exclusive, le biconditionnel peut être défini sur la base des autres connecteurs logiques :
  $p \leftrightarrow q =_{def} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Le biconditionnel a une fonction importante en philosophie, car on l'utilise souvent pour formuler des définitions

Digression : Définitions et conditions nécessaires et suffisantes

Qu'est-ce qu'une définition ?

- Syntaxiquement, une définition consiste en trois parties :
  1. le *definiendum*, ce qui est défini ; normalement une phrase schématique qui contient l'expression qu'on veut définir
  2. Un connecteur qui indique qu'il s'agit d'une définition, p. ex. "$=_{def}$", "$\Leftrightarrow$", ou "si ou seulement si" (abrévié par "ssi")
  3. le *definiens*, ce qui définit ; normalement une phrase qui nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'application correcte de l'expression définie

Digression : Définitions et conditions nécessaires et suffisantes

Conditions nécessaires et sufficantes

- Les concepts d'une condition nécessaire et d'une condition suffisante sont définis au moyen d'un connecteur logique, le conditionnel matériel :

  Définition : condition nécessaire A est une condition nécessaire de B si et seulement si il est vrai que $B \rightarrow A$.

  Définition : condition suffisante A est une condition suffisante de B si et seulement si il est vrai que $A \rightarrow B$.

- Par conséquence, A est une condition nécessaire et suffisante de B si et seulement si il est vrai que $(B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B)$ (ou par la définition de "$\leftrightarrow$" : $A \leftrightarrow B$)

Digression : Définitions et conditions nécessaires et suffisantes

Exemple : la définition de la connaissance critiqué par Gettier

- S sait que p si et seulement si :
  1. p est vrai ;
  2. S croit que p ; et
  3. la croyance de S que p est justifiée.

Dans son article influent sur la connaissance[2], Gettier montre que 1.-3. ensemble ne nous donnent pas une conditions suffisante pour savoir p

2. Gettier, Edmund L. : Is justified true belief knowledge ? *Analysis* 23, 1963, p 121-123.

Tables de vérité

Comment formuler une sémantique compositionnelle en utilisant des tables de vérité ?

- Les tables de vérité que nous avons vues ci-dessus nous donnent une méthode pour déterminer les valeurs de vérité des formules complexes de qui contiennent un connecteur logique appliqué à une ou deux formules atomiques
- Une sémantique compositionnelle doit généraliser cette méthode à toute formule, ceci incluant les formules qui contiennent un nombre arbitraire de connecteurs logiques
- Pour ce faire, nous pouvons simplement remplacer les variables propositionnelles par des métavariables dans les tables de vérités introduites ci-dessus

Tables de vérité

Comment formuler une sémantique compositionnelle en utilisant des tables de vérité ?

- Les résultats sont des tables de vérités qui définissent les vérifonctions associées aux connecteurs logiques, p. ex. :

A	B	$A \wedge B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

TABLE – Table de vérité qui définit la vérifonction associé à la conjonction

- Notez que les métavariables sont exclusivement utilisées dans les tables de vérité qui définissent la sémantique des connecteurs logiques ; dans les exercices, nous construisons des tables de vérité “régulières” des formules de L_0

Digression : Métavariables, métalangage et langage objet

- Une sémantique est toujours définie pour un langage particulier, le *langage objet* – notre langage objet est L_0
- Le langage objet n'est pas utilisé pour formuler sa propre sémantique ; on utilise un langage distinct, qui est plus expressif que le langage objet, le *métalangage*
- Les métavariables n'appartiennent pas au langage L_0, mais au métalangage
- D'autres concepts sémantiques comme p. ex. “conséquence logique” ou “vrai” et “faux” appartiennent aussi au métalangage

Tables de vérité

Tables de vérité des formules plus complexes

Un exemple :

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**

TABLE – Table de vérité pour "$(p \to q) \wedge (q \to r)$"

Tables de vérité

Tables de vérité des formules plus complexes

- On peut construire des tables de vérité pour chaque formule de L_0, en particulier pour des formules qui contiennent plus que deux formules atomiques ou (disjonction inclusive !) plusieurs connecteurs logiques
- Si on veut construire une table de vérité pour une formule complexe, il peut être utile d'inclure dans la table toutes les sous-formules qui contiennent seulement un connecteur logique
- Pour déterminer la valeur de vérité d'une formule complexe, il faut identifier le *connecteur logique principal*

Traduction en langage L_0

- Pour traduire une phrase d'un langage naturel en formule de L_0, il faut identifier i) les mots qui indiquent un connecteur logique (p. ex. "ne ... pas", "et", "ou", "si", ...) et ii) déterminer la structure logique de la phrase
  - P. ex. "Si Louis a promis à Lisa de faire les courses, Lisa ne va pas faire les courses, et Lisa sait que Louis a l'obligation d'acheter quelque chose."
  - Traduction plausible : $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$ ("p" = "Louis a promis à Lisa de faire les courses.", "q" = "Lisa va faire les courses.", "r" = "Lisa sait que Louis a l'obligation d'acheter quelque chose.")

Portée des connecteurs logiques

- La *portée* d'un connecteur logique consiste en la plus petite part ou en les plus petites parts de la formule avec lesquelles il se combine pour former une formule
- "portée" est un concept syntaxique
- Selon la syntaxe de L_0, la portée est indiquée par les parenthèses (sauf dans le cas de la négation des formules atomiques)

Portée des connecteurs logiques

Portée des connecteurs logiques : quelques exemples

- $\neg(p \vee \neg p)$ (portée de la deuxième occurrence de "$\neg$")
- $\neg(p \vee \neg p)$ (portée de la première occurrence de "$\neg$")
- $\neg(p \vee \neg p)$ (portée de la seule occurrence de la disjonction)

Le connecteur logique principal

- Pour évaluer une formule de L_0 en utilisant une table de vérité il faut d'abord identifier le connecteur logique principal dans la formule
- Le *connecteur logique principal* est le connecteur logique qui n'est pas dans la portée d'un autre connecteur logique est qui a tous les autres connecteurs logiques dans sa portée, p. ex. :
  - $\neg(p \vee \neg p)$
  - $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$
  - $((p \leftrightarrow q) \wedge \neg r) \vee \neg p$
- Simplement dit : Le connecteur logique principale est le connecteur logique qui a tout le reste de la formule dans sa portée
- La colonne du connecteur logique principal dans une table de vérité nous donne la distribution des valeurs de vérité pour la formule qu'on veut évaluer
- Sémantiquement, le connecteur logique principal est le connecteur tel qu'il n'y a pas d'autre connecteur logique qui prenne sa valeur de vérité de sortie comme entrée