Introduction à la logique des propositions I

Robert Michels

mail@robert-michels.de

Université de Neuchâtel – semestre d'automne 2019 – 23 septembre 2019

Bibliographie

Les deux livres et les polycopiés sur lesquels le cours se base :

- Lepage, F. : *Eléments de logique contemporaine*. 3e édition. PU Montréal 2010
- Halbach, V. : *The Logic Manual*. Oxford University Press 2010
- Polycopiés des cours de logique de Prof. Fabrice Correia (Neuchâtel) et de Bernd Buldt (Konstanz)

Qu'est-ce que la logique ?

Définir la logique ?

- Il est difficile de définir la logique
- En fait, il n'y a pas de définition standard qui soit acceptée par tous les logiciens
- L'une des raisons : la logique est utilisée à des fins différentes dans des sciences différentes, comme la linguistique, les mathématiques, l'informatique et, naturellement, la philosophie

Qu'est-ce que la logique ?

Définir la logique ?

- Selon la perspective sur la logique que nous allons adopter dans ce cours, la logique s'occupe des raisonnements, des arguments, et des inférences et elle nous donne une théorie systématique et générale de ces notions
- Ce n'est pas une définition de la logique, mais cette caractérisation reflète bien l'utilisation de la logique dans les différents domaines de la philosophie
- La question de la définition correcte de la logique est discutée dans la *philosophie de la logique* et n'est pas discutée en détail dans ce cours

Qu'est-ce que la logique ?

La logique comme discipline normative et comme discipline descriptive

Deux différentes perspectives sur la logique :

1. *La logique comme discipline normative* : La logique nous donne des normes pour le raisonnement correct/les inférences correctes/ les arguments corrects
2. *La logique comme discipline descriptive* : La logique nous permet de décrire comment la population raisonne dans les faits

- Nous étudions la logique comme discipline normative : Elle nous donne des standards de qualité, nous permettant p. ex. de distinguer entre des bons et des mauvais arguments

Qu'est-ce que la logique ?

La logique ou *les* logiques ?

- Historiquement, on a supposé (et beaucoup de philosophes le supposent encore) qu'il y a une seule logique correcte
- Dans ce cours et le cours qui le suivra, nous étudions la *logique classique*
- Au cours de ce semestre, nous étudierons la logique classique des propositions, et au semestre prochain la logique classique des prédicats (développée systématiquement par Frege ("Begriffsschrift") et considérée comme la logique correcte par des philosophes comme Quine)
- Quelles autres logique y a-t'il ?

Qu'est-ce que la logique ?

La logique ou *les* logiques ?

- Il existe aussi des logiques *non-classiques* qui rejettent des suppositions particulières de ces logiques classiques (p. ex. la logique tri-valente, la logique paraconsistente, . . .)
- Il existe aussi des logiques qui sont des extensions de la logique classique (ou d'une logique non-classique)
- Ces logiques nous permettent de modélliser des arguments/inférences/raisonnements qui se basent sur des concepts comme p. ex. "il est possible que", " il est nécessaire que" (logiques modales), ou "il est obligatoire que", "il est permis que" (logiques déontologiques)

Qu'est-ce que la logique ?

La logique ou *les* logiques ?

- En tout cas, on peut considérer la logique classique comme le fondement (ou au moins, d'un point de de vue pédagogique, comme un bon point de départ) qu'il faut maîtriser avant d'étudier les logiques non-classiques

Qu'est-ce que la logique ?

La logique en philosophie et en dehors de la philosophie

- Les méthodes de modélisation logique ont des applications en dehors de la philosophie : p. ex. en informatique pour analyser la structure des logiciels ; en linguistique pour analyser la structure syntactique et sémantique des phrases ; . . .
- La logique est aussi appliquée (sous forme de preuves) et étudiée comme sujet propre en mathématiques (et en philosophie)
- Deux applications importantes de la logique en philosophie : analyse des arguments et construction des arguments
- Ces applications sont importantes, car la philosophie s'occupe presque toujours d'arguments (pour des théories, des hypothèses,. . .)
- Nous nous concentrerons sur ces applications dans la majorieté du cours

Qu'est-ce que la logique ?

La logique comme outil et comme sujet propre

- *La logique comme sujet propre* – les logiciens construisent des logiques, ils prouvent des théorèmes et ils montrent que ces logiques ont certaines propriétés formelles importantes comme la complétude et la correction (l'explication des ces propriétés est à suivre à la fin du semestre)
- *La logique comme outil* – la logique donne aux philosophes des standards de bon raisonnement ainsi que des méthodes formelles pour analyser et évaluer des arguments

Qu'est-ce qu'un argument ?

Définition : argument Un argument est un ensemble de propositions dont l'une est la conclusion et les autres sont les prémisses et dont les prémisses supportent la conclusion.

- Relation entre *raisonnement*, *argument*, et *inférence* :
- Un argument est le résultat d'une séquence de raisonnements (raisonnement = activité)
- La conclusion d'un argument est le résultat d'une inférence basée sur des prémisses (inférence = activité)

Qu'est-ce qu'un argument ?

Un exemple

1. S'il pleut, la rue est mouillée.
2. Il pleut.
3. $\therefore$ La rue est mouillée.

- Le symbole "$\therefore$" indique la conclusion d'un argument
- Notez que la conclusion peut figurer avant les prémisses d'un argument
- Ce qui est important pour la logique est la relation de support logique entre les prémisses et la conclusion et non leur ordre dans un texte

Qu'est-ce qu'un argument ?

Qu'est-ce qu'une proposition ?

Caractéristiques positives

- Une *proposition* est un objet abstrait qui est exprimé par une phrase (ou plusieurs phrases) en langage naturel et qui est vrai ou faux
- Les propositions ne sont pas liées a un langage naturel particulier : Les phrases "Il y a une université à Neuchâtel.", "Il existe une université à Neuchâtel.", "In Neuchâtel gibt es eine Universität." et "There is a university in Neuchâtel." expriment la même proposition

Qu'est-ce qu'un argument ?

Qu'est-ce qu'une proposition ?

Caractérisatiques négatives

- Les phrases qui sont grammaticalement mal formées n'expriment pas des propositions (p. ex. "Suis toi malade vertes.")
- Les phrases qui ne sont ni vraies ni fausses n'expriment pas des propositions (p. ex. "Les idées vertes rêvent sauvagement.")
- Questions n'expriment pas des propositions (p. ex. "Quelle heure a t-il ?")
- Les impératifs n'expriment pas des propositions (p. ex. "Laisse-moi tranquille !")
- Ces restrictions sur ce que peut être une proposition nous donnent une restriction sur le domaine d'application de la logique classique : elle ne peut être appliquée qu'aux propositions

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

- Des inférences différentes correspondent à différents types d'arguments
- En général, les différents types d'arguments sont caractérisés par différentes relations de support entre leurs prémisses et leurs conclusions

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Argument inductif

- Le fait qu'un grand nombre de prémisses attribuent une propriété à des object de la même catégorie supporte une conclusion qui attribue cette propriété à tous les objets de cette catégorie

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Exemple

Argument 1 (inductif)

1. Neuchâtel n'est pas loin de la France.
2. Lausanne n'est pas loin de la France.
3. Genève n'est pas loin des la France.
4. ∴ Toutes les villes en Suisse Romande ne sont pas loin de la France.

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Quelques caractéristiques des arguments inductifs

- Inférence d'une conclusion générale sur la base des prémisses particulières
- La relation de support entre prémisses et conclusion peut être plus ou moins forte : p. ex. si on enlève les premises 2. et 3. d'Argument 1, l'argument est moins fort
- Les inférences inductives sont annulables : il est toujours possible d'ajouter une prémisse additionelle qui falsifie la conclusion

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Exemple

Argument 2 (inductif)

1. Milou aime les os.
2. Tina aime les os.

⋮

n Snoopy aime les os.

$n+1$ ∴ Tous les chiens aiment les os.

Exemple

Argument 3 (inductif)

1. Il y a une université à Neuchâtel.
2. Il y a une université à Lausanne.
3. Il y a une université à Genève.
4. ∴ Il y a des universités dans toutes les villes de Suisse Romande.

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

- (Notez que les preuves par induction mathématique sont un cas particulier : dans une induction mathématique, on considère toutes les prémisses possibles pour établir la conclusion ; un tel argument est en fait un argument déductif – voir la prochaine section)
- Il existe d'autres types d'arguments, comme les arguments abductifs, les arguments par analogie, ...– par la suite, nous nous focaliserons sur les arguments déductifs

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Arguments déductifs

- Nous avons vu que les arguments inductifs sont annulables
- Donc, il n'est pas nécessaire que la conclusion d'un argument inductif soit vraie, si les prémisses sont vraies
- (En d'autres termes : Il est possible que les prémisses d'un argument inductif soient vraies, mais que sa conclusion soit fausse)
- Considérons Argument 3 : il est possible qu'il y ait une ville en Suisse qui n'ait pas d'université (une possibilité qui est en fait réalisée)
- Alors, toutes les prémisses d'Argument 3 sont vraies, mais sa conclusion est fausse

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Arguments déductifs

- Par contre, les arguments déductifs sont caractérisés par le fait que leurs prémisses supportent *nécessairement* leur conclusion

Définition : validité d'un argument Un argument est valide *si et seulement si* il est nécessaire que sa conclusion soit vraie, si ses prémisses sont vraies.

- (Formulation alternative équivalente de cette définition : Un argument est valide si et seulement si il n'est pas possible que ses prémisses soient vrais et sa conclusion soit fausse)

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Arguments déductifs

- Si un argument est valide, on dit aussi que sa conclusion est une *conséquence logique* de ses prémisses, ou que sa conclusion *suit* de ses prémisses
- (Notez aussi une impliquation de cette définition : un argument inductif n'est jamais valide, car il est toujours possible d'ajouter une nouvelle prémisse qui falsifie la conclusion)
- Notez qu'un argument peut être valide même quand ses prémisses sont fausses : la définition de la validité dit que *si on suppose que les prémisses sont vraies* la conclusion doit être vraie aussi, elle ne dit pas que les prémisses doivent en fait être vraies
- Par conséquent, la validité d'un argument ne garantit pas toujours que l'argument soit persuasif

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

Exemple

Argument 4 (déductif)

1. Robert M. est champion du monde de football ou Robert M. porte de lunettes.
2. Robert M. ne porte pas de lunettes.
3. ∴ Robert M. est champion du monde de football.

- Argument 4 est valide (si maintenant vous ne voyez pas pourquoi, pas de souci ! Nous allons discuter les critères de validité plus tard dans le cours), mais personne ne va accepter sa conclusion

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

- Argument 4 est valide, mais pas *correct* :

Définition : correctitude d'un argument Un argument est *correct* si et seulement s'il est valide et ses prémisses sont vraies.

- Notez qu'il suit de cette définition et de la définition de la validité que la conclusion d'un argument correct est toujours vraie

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

- La *validité* et la *correction* nous donnent deux critères de qualité des arguments déductifs
- Par conséquent, un argument déductif peut échouer/peut être critiqué, parce que ...
  - (au moins) une de ses prémisses est fausse (l'argument n'est pas correct)
  - sa conclusion n'est pas une conséquence logique de ses prémisses (l'argument n'est pas valide)

Qu'est-ce qu'un argument ?

Types d'arguments

- Exemple : Argument 4 n'est pas correct parce que sa première prémisse est fausse – je ne suis pas champion du monde de football, et je ne porte pas non plus de lunettes
- Exemple : Argument 2 n'est pas valide parce qu'il est possible que toutes ses prémisses sont vraies, mais que sa conclusion soit fausse – il est bien possible que toutes les prémisses de l'argument soient vraies, mais qu'il existe un autre chien qui n'est pas mentionné et qui n'aime pas les os
- En général, comment est-ce qu'on peut montrer qu'un argument n'est pas valide ? – on construit une situation possible dans laquelle ses prémisses sont vraies, mais la conclusion est fausse ; on dit qu'une telle situation nous donne un *contrexemple*

Argument et forme logique

Quelques exemples d'arguments déductifs valides

Argument 5 (déductif)

1. Anne mange des frites ou Bernard mange des légumes.
2. Anne ne mange pas de frites.
3. $\therefore$ Bernard mange des légumes.

Argument 6 (déductif)

1. Anne mange des frites et Claude mange des nouilles.
2. $\therefore$ Claude mange des nouilles.

Argument et forme logique

Quelques exemples d'arguments déductifs valides

Argument 7 (déductif)

1. Si Bernard mange des frites, Claude mange des nouilles.
2. Bernard mange des frites.
3. $\therefore$ Claude mange des nouilles.

Argument 8 (déductif)

1. Si Claude manque son train, Claude sera en retard.
2. Claude manque son train.
3. $\therefore$ Claude sera en retard.

- Observez que Arguments 7 et 8 ont la même forme !

Argument et forme logique

La forme logique d'Argument 7 et d'Argument 8

- On peut remplacer toutes les occurrences des propositions "Bernard mange des frites" et de "Claude manque son train" dans Arguments 7 et 8 par la lettre schématique "*p*"
- . . . et toutes les occurrences de "Bernard mange des nouilles" et de "Claude serait en retard.' dans Arguments 7 et 8 par la lettre "*q*"[1] pour isoler la forme que les deux arguments ont en commun (attention, mélange de langage naturel et langage formel) :

1. Si p, q.
2. p.
3. $\therefore q$.

1. Citation : pour mentionner un mot ou une phrase sans l'utiliser avec sa propre signification, on utilise des guillements (p.ex. "'Ivan' est un prénom russe.", "'La vie est belle.' est une phrase française."

Argument et forme logique

- Il suit de la définition de la validité que tout argument de cette forme est valide – Pourquoi ? On le verra plus tard !
- Notez que la première prémisse ("Si p, q.") de cet argument schématique contient deux propositions, de même que la construction "si . . . , . . . "
- Ce mot correspond à un *connecteur logique*
- Dans la logique des propositions, la forme logique d'une proposition est détérminée par les connecteurs logiques contenus dans cette proposition
- La forme logique d'un argument déductif est détérminée par la forme logique de ses prémisses et de sa conclusion
- La logique s'occupe de ces deux types de forme logique – elle ne s'occupe pas du contenu des propositions

Argument et forme logique

- Quels autres mots indiquent un connecteur logique ? – ça dépend du langage !
- Pour étudier la forme des arguments, la forme logique des propositions, et la relation entre les deux types de formes, nous allons introduire un langage formel
- Les avantages de travailler avec un langage formel : les langages formels ne contiennent pas les imperfections des langages naturels (vague, ambigüité, mots sans signification, . . .) et peuvent être manipulés avec des techniques mathémathiques

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Remarques préliminaires

- La *syntaxe* définit les règles pour la formation des formules d'un langage formel (elle nous donne la *grammaire* d'un tel langage)
- La *sémantique* définit les règles pour l'évaluation des formules d'un langage formel (elle nous donne des règles pour déterminer la signification de toutes les phrases du langage)
- Un langage formel est défini par un ensemble de symboles (l'*alphabet* du langage) en combinaison avec des règles de formation des formules sur la base de cet ensemble
- L_0, le langage formel de la logique des propositions, est identique à l'ensemble de toutes les formules spécifiées par les règles de formation à base de l'alphabet de L_0

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Définition : l'alphabet de L_0 L'alphabet de L_0 consiste en :

- un ensemble dénombrable des variables propositionnels $\{p_0, \ldots, p_i\}$, $i \in \mathbb{N}$
- les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- les parenthèses : (,)

Remarques sur l'alphabet

- Les connecteurs sont des *opérateurs propositionelles* : ils s'appliquent à des propositions pour former de nouvelles propositions
- Une convention pratique : pour simplifier, nous utilisons souvent les lettres *p*,*q*,*r*,... au lieu de $p_0, p_1, p_2, \ldots$

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Symboles alternatifs pour les connecteurs logiques

- Symboles alternatifs également aussi utilisés pour les connecteurs dans quelques textes :
  - "$\sim$" au lieu de "$\neg$"
  - "&" (ou dans des anciens textes parfois ".") au lieu de "$\wedge$"
  - "$\supset$" au lieu de "$\rightarrow$"
  - "$\equiv$" au lieu de "$\leftrightarrow$"
- (Soyez cohérents et ne mélangez pas différents symboles pour les mêmes connecteurs)

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Définition : les formules de L_0

1. Chaque variable propositionelle $p_i, i \in \mathbb{N}$ est une formule. (on dit : *formule atomique*)
2. Si A est une formule, $\neg A$ est une formule.
3. Si A et B sont des formules, $(A \wedge B)$ est une formule.
4. Si A et B sont des formules, $(A \vee B)$ est une formule.
5. Si A et B sont des formules, $(A \rightarrow B)$ est une formule.
6. Si A et B sont des formules, $(A \leftrightarrow B)$ est une formule.
7. Une séquence de symboles de l'alphabet de L_0 est une formule *si et seulement si* elle peut être construite par un nombre fini d'applications des règles de formation 1-6.

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Remarques sur les règles de formation

- Dans les règles, j'ai appliqué une autre convention pour simplifier : s'il est claire dans un contexte qu'un mot ou une phrase est mentionné, mais pas utilisé (ce qui est le cas pour les métavariables et formules contenues dans la définition), on peut omettre les guillemets
- Une autre convention pour simplifier : les parenthèses extérieures peuvent être omises ; p.ex. on peut écrire "$p \wedge q$" au lieu de "$(p \wedge q)$" et "$p \wedge (p \rightarrow \neg q)$" au lieu de "$(p \wedge (p \rightarrow q))$"

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Remarques sur les règles de formation

- Les règles contiennent des métavariables ("A", "B") qui sont utilisées pour référer à des formules de L_0
- On appelle les formules qui contiennent des connecteurs, c'est-à-dire les formules construites sur la base des règles de formation, des *formules moléculaires* ou *formules complexes*
- Donc la raison pour utiliser des métavariables est qu'elles peuvent représenter aussi bien des formules atomiques que complexes – p. ex. pour construire la formule "$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$" (qui est syntaxiquement correcte), on applique la règle 3 aux formules atomiques "p" et "q", et "r" et "s" pour former "$(p \wedge q)$" et "$(r \wedge s)$" et puis on applique la même règle à ces deux formules complexes

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Remarques sur les règles de formation

- Les règles nous donnent une *définition récursive* des formules ; les définitions récursives sont celles qui utilisent le terme qu'elles définissent
- On dit qu'une séquence de termes de l'alphabet est *syntaxiquement bien formée*, si c'est une formule, et qu'une séquence est *syntaxiquement mal formée*, si ce n'est pas une formule

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Exemples de formules de L_0 (et les règles de formation qu'il faut pour les construire)

- p (règle 1)
- q (règle 1)
- $\neg q$ (règles 1,2)
- $p \wedge q$ (règles 1,3)
- $r \leftrightarrow q$ (règles 1,6)
- $p \vee \neg p$ (règles 1,2,4)
- $r \rightarrow \neg p$ (règles 1,2,5)
- $p \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$ (règles 1,2,5)
- $(r \wedge \neg(p \rightarrow (r \leftrightarrow q))) \vee (q \wedge \neg q)$ (règles 1,2,3,4,5)

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Exemple d'application des règles de formation

1. p – règle 1
2. q – règle 1
3. $(p \rightarrow q)$ – règle 5, appliquée à 1. et 2.
4. $\neg(p \rightarrow q)$ – règle 2, appliquée à 3.
5. $p \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$ – règle 5, appliquée à 1. et 4.

Le langage formel de la logique des propositions L_0

Syntaxe de L_0

Exemples de séquences de symboles de l'alphabet de L_0 syntaxiquement mal formée

- pq
- $p\neg$
- $q\neg p$
- $p \vee p \wedge q$
- $p\vee$
- $\neg \rightarrow q$
- $pr\neg pr \wedge \vee qr \leftrightarrow$

Langage formel et langage naturel

Langage formel et langage naturel

- Nous avons déjà constaté que les variables propositionelles en langage formel correspondent aux propositions, qui correspondent à des phrases
- Nous avons aussi remarqué qu'il y a des mots qui indiquent des connecteurs logiques ; à quels mots correspondent les connecteurs logiques ?

Langage formel et langage naturel

Correspondance entre connecteurs et mots français

- "$\neg$" – négation ("...ne ...pas ..." ou, sous forme d'opérateur propositionel : "il n'est pas le cas que ...") – "Alexandra *n*'aime *pas* les aubergines." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$\neg p$"
- "$\wedge$" – conjonction ("...et ...") – "Alexandra aime les aubergines *et* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \wedge q$"
- "$\vee$" – disjonction ("...ou ...") – "Alexandra aime les aubergines *ou* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \vee q$"

Langage formel et langage naturel

Correspondance entre connecteurs et mots français

- "$\rightarrow$" – conditionnel matériel ("si . . . , . . . ") – "*Si* Alexandra aime les aubergines, Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \rightarrow q$"
- "$\leftrightarrow$" – équivalence matérielle (". . . si et seulement si . . . ") – "Alexandra aime les aubergines *si et seulement si* Bernard est timide." peut être traduit par/au moyen de la forme logique "$p \leftrightarrow q$"

Langage formel et langage naturel

Une correspondance parfaite ?

- Les trois premiers connecteurs correspondent bien à leurs contreparties en langue naturelle, mais la correspondance de "$\rightarrow$" en langage naturel est moins claire
- Pourquoi ? – on le verra la prochaine fois !